你会不会三等分一角?

錢曾濤 著

中国青年出版社

青年数学叢書

你会不会三等分一角

錢曾濤 著

中国青年出版社

1956年·北京

你会不会三等分一角？
錢曾濤著
*
中国青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市書刊出版業營業許可証出字第036号
中国青年出版社印刷厂印刷
新华書店总經售
*
787×1092 1/32 2 1/2印張 43,000字
1956年12月北京第1版 1956年12月北京第1次印刷
印數 1—30,000

統一書号：13009·102
定价(8)二角六分

內 容 提 要

数学家華罗庚先生在一篇文章里說到："在近二三年來，我收到成百封关于研究用圓規和直尺三分任意角的信件，……这問題戕害了不少青年，因为这是已經解决了的'不可能'問題，搞这問題的青年大部都是成績优异的青年，但他們把宝貴的时光花在这毫無出路的研究工作上。"这本書就是为了帮助这一些青年而寫的。作者用現在中学数学課本里講到的一些知識，比較系統地闡明了一些几何作圖不可能問題。先从几个方面說明所謂几何作圖不可能問題是指在什么样的条件下面說的，再進一步說明为什么这些問題是作圖不可能問題，同时也介紹一些解这些問題的方法。不但能解开讀者关于这些問題的一切疑团，而且能帮助讀者樹立正确的学習态度，引起讀者進一步研究数学的兴趣。

写在前面

目前，还有一些人在研究用直尺和圓規三等分一任意角的問題．他們听人家說这是一个几何作圖不可能問題，看看問題却又这么簡單，就偏不相信它不可能，於是廢寢忘食，刻苦鑽研．他們肯鑽研的精神是好的，可是在这个問題上鑽研，却是浪費精力．因为对於这个問題，从前的人已經做过不少的研究，有了肯定的結論，所以这已經是早已解决的問題，不成問題的問題，用不到我們再去研究了．

为了帮助爱好几何的青年对一些几何作圖不可能問題有一个初步的認識，从而不再把宝貴的时間浪費在这些已經不成問題的問題上，我編写了这一本小册子．

关於这个問題的書籍和文章，原已經有过一些．但是我覺得这些書籍和文章，有的講得比較簡單，有的講得比較高深，对一般具有中学数学水平的讀者来說，不是都能看懂的．因此我参考了这些材料，用現在中学数学課本里講到的一些知識，来比較系統地闡明这些問題．我先从几个方面說明所謂几何作圖不可能問題是指在什么样的条件下面說的，再进一步說明为什么这些問題是作圖不可能問題，同时也介紹了一些解这些問題的方法．由於不引用高等数学，有的地方或許論証不够严密，但是通过一些具体而淺显的例子，用比較、

分析、綜合的方法得出結論来，我認为还是有說服力的.

通过对这些問題的探討，我想讀者不但能够解开关於这些問題的一切疑团，而且还能够体会到数学上理論和实踐結合的重要性，明确代数和几何的内在联系．假如讀者能因此树立正确的学習态度，發生進一步研究数学的兴趣，那更是作者覺得十分欣慰的了.

由於作者水平的限制，書里可能有缺点和錯誤，希望讀者批評指正.

錢曾濤

1956年5月

目　次

一　惊奇的回答

时鐘也会三等分一角。

我知道你曾經学習过几何，或者現在正在学習几何，而且学習得很好．你不是很喜欢解决几何里的作圖問題嗎？的确，爱好几何的人，对作圖問題往往感到特别有兴趣．我想，你一定会知道一个看来很簡單却又那么困难的作圖問題，就是"把一个任意角三等分"．你也許同許多人一样，尝过它的味道，譬如說，把已給的角 AOB 当做中心角（圖 1），把这角所对的弦 AB 三等分於 C、D 兩点，然后連接 OC、OD，再延長交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 E、F，認为这样 OE、OF 就三等分 $\angle AOB$ 了．但你又很快就会發現，$\angle AOE$ 同 $\angle BOF$ 固然是相等的，因为很容易証明 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$；而 $\angle EOF$ 却比它們大，理由也很簡單，就是在 $\triangle AOD$ 里，OC 是 AD 上的中線，又 $OA>OD$，所以 $\angle AOC<\angle COD$，我們不是已經知道，在三角形里，中線跟小的鄰边所夾的角大於它跟大的

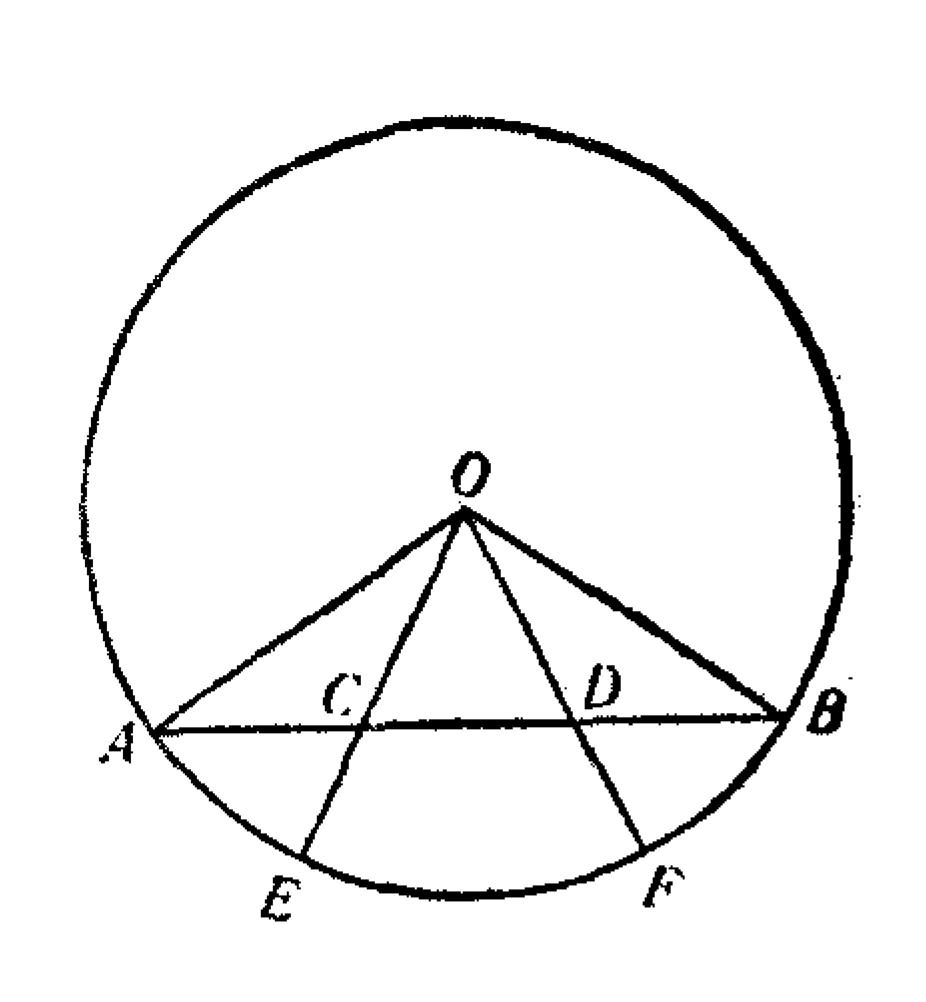


圖 1.

鄰边所夾的角嗎? 因此你失敗了!

你是不会甘心於自己的失敗的. 你不是請教过老师嗎?而且也曾經閱讀过一些書籍或杂誌,想得到它的解答. 但是結果使你很失望,都告訴你这是"不可能作圖問題". 我想,表面上或許你沒有什么意見,但是内心里还不免会將信將疑的.

假如你問我:"你会不会把一个任意角三等分呢?"

我的回答是:"会,而且很容易!"

这个回答一定会使你很惊奇吧? 你一定以为我是一个大言不慚的人了! 否則就是把問題听錯了! 或許是把这題理解成特殊角的三等分,如直角的三等分,平角的三等分,因此你会很快地提醒我:"要注意是任意角啊!"

我是完全注意到这一点的,請你別性急,我来告訴你怎样作法:

几何里的許多作圖問題,在实际工作当中是往往会遇到的. 因此,有些問題不能單純地看做几何作圖,而且也是一种技术.譬如說,我們都知道等分圓周的問題是一个比較有趣的作圖題,这就是把圓周分成n等分.其实作一个正n边形也就跟把圓周分成n等分是一回事. 沒有深刻研究几何的人,如画家、無線电設計者、建筑家以及手工艺家,在工作当中也常常会遇到这样的問題.我們祖国的美丽的五星紅旗,不就是要先作正五边形嗎?至於"把一个任意角三等分",也同样是被建筑家、圖案設計者等广泛地应用着的,他們却很順利地把这个問題解决了. 譬如說,只要用量角器先把要分的角量出度数来,然后再算出它的三分之一应該是多少度多少分,这样不是很

快就可以把三等分角作出了嗎?

"不能这样，这是近似的作法，假如測得的度数不能被三所整除呢?"你一定会很不服气地說.

那末，我們就来換一种作法，或許可以滿足你的要求.

你大概閱讀过苏联别萊利曼所著的"趣味几何学"吧，这是一本很好的課外讀物，它会告訴你去注意我們周圍世界里各种事物的習見的几何关系，告訴你怎样把学到的几何学知識应用到实际方面去，引起你研究几何学的願望，养成你研究几何学的嗜好. 我現在来介紹这本書里写的一种"三等分角"的方法，一定会使你感到兴趣.

大家知道，时鐘面上都有时針分針，分針走一轉，时針就走过一个字. 也就是分針轉动了 360° 的角，时針就走了 360° 的十二分之一，而十二是三的倍数. 我們利用时鐘的这个特性，就能把任意角三等分了.

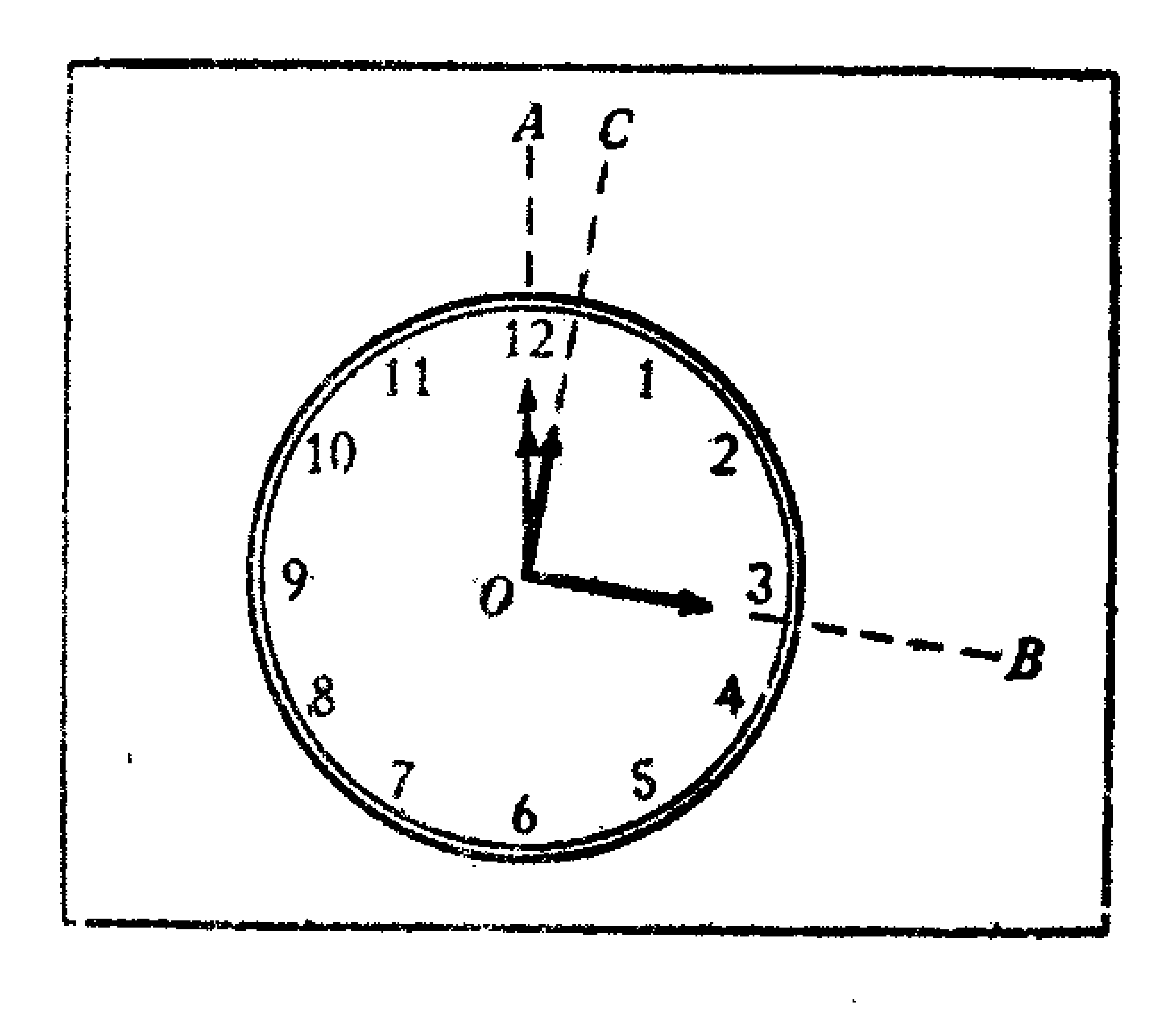


圖 2.

手續很簡單，你把要三等分角的圖形画到一張透明的紙上(圖 2)，当时鐘的时針分針併在一起的时候(为了看起来更清楚，可以撥到正十二时)，把透明紙上的圖样舖到时鐘面上，使圖上的角的頂点恰好落在針的軸心上，角的一边跟相併的兩針相合，然后你把分針慢慢地撥到跟角的另一边

相合的位置,时針当然也轉动了一个角,用筆在那透明紙上把时針現在的位置記下来,我們从圖上可以知道,时針所走的角 $\angle AOC$ 一定是 $\angle AOB$ 的十二分之一.因此,再把 $\angle AOC$ 放大到四倍.放大角度的方法,我想你是一定知道的,那末这个角不就是 $\angle AOB$ 的三分之一了嗎?

二 問題說錯了!

用几种特制的器械可以三等分一角.

"这方法眞巧妙,居然时鐘也会替我們解决三等分角問題,不过……"

我知道你还不滿意,你認为这还沒有解决你所提出的問題,你認为我們应該用几何的方法来把任意一角三等分,上面的方法虽然很巧妙,但畢竟沒有用到几何的知識.

如果你的意思是这样,那我得提醒你,你把問題說錯了.你不老是这样問旁人嗎:"你会不会把一个任意角三等分呢?"照理,只要分出就算数,对不对?

你或許以为我在吹毛求疵了,你会这样說:"那又何必呢?这問題本来就是几何学上的,当然要用几何知識来作出."

这可不能这样說. 我們研究任何一件事物,应該有正确的科学态度,特别是学習数学的时候,对一个問題的提出或研究,要明确已給的条件,根据这些条件要想达到什么样的目的,都要敍述得淸淸楚楚,不能含糊其辞. 假如我这样問你一

个問題:"你会不会做一个五角星呢?"你要解决这問題的方法就多得很. 譬如說:依照一个現成的五角星把它描下来;或者用正方形的紙片对折成一个等腰直角三角形,再用斜边的中点做角頂折成相等的五个角,然后用剪刀剪出一个五角星来;或者用一張兩边平行的紙条,挽一个結,把它小心地抽紧,不要讓它的边卷起來,一面抽,一面用手慢慢地压平,就会做成一个五边形,再作出它的各对角線,就画出一个五角星了;或者应用几何課本上黃金分割的作圖法,也可以把它作出来.我們应該說,这些方法都是所提出的問題的解答,不能說这个对那个不对.

好吧,那我們現在就依你說要用几何学的知識,来解三等分一角的問題吧. 我想提出几个解法,看看它們是不是符合你的要求.

你总知道一位古代希臘的物理学家又是数学家的阿基米德(公元前287(?)年–公元前212年)吧. 我們不但在物理学上遇到他,在几何学上也遇到他. 他还是一个热烈的爱国者,当罗馬人圍攻希臘的敍拉古城的时候,他貢献出自己所有的科学知識,来領导这个城市的防御工作. 后来这座城市陷落了,虽然罗馬將軍下令不准伤害这位偉大的学者,但是他終於被罗馬兵士杀死了. 据說在罗馬兵士闖进他家的时候,他正在沙地上画几何圖形,他恐怕兵士破坏他的圖形,嘴里还連連叫喊"不要动我的圓"呢!

从他的著作里,我們知道这位学者也研究过这个問題. 他把所要三等分的角 AOB 的一边 BO 延長(圖3),再用 O 做

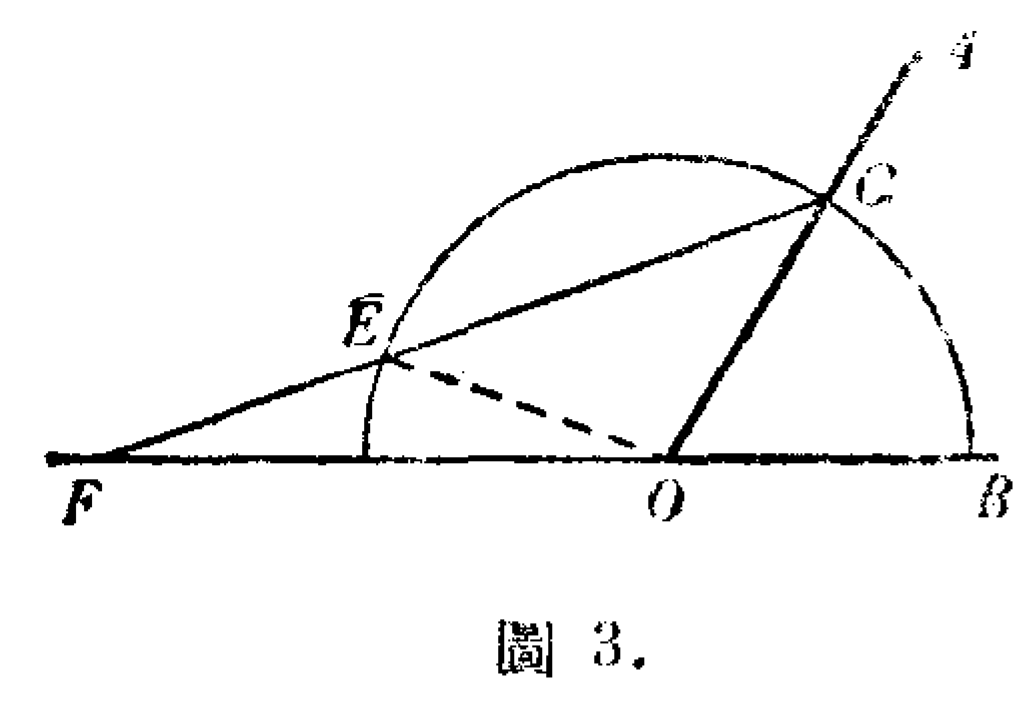


圖 3.

圓心，任意的長 r 做半徑，画一个半圓，跟角的另一边相交於 C. 於是他說，过 C 点用直尺作一直線，使它跟半圓和 BO 的延長線交於 E、F 兩点，使 EF 恰巧等於圓的半徑 r. 这可以这样作：我們事先在直尺上記下 E、F 兩点，使它們中間的距离等於 r，然后繞 C 点滑动直尺的位置，使直尺上的 E、F 分别落在半圓和 BO 的延長線上.这是完全可能的.这样一来，我們就得到 $\angle F=\frac{1}{3}\angle AOB$.

因为 $$EF=EO=OC,$$

所以 $$\angle AOB=\angle OCE+\angle F=\angle OEC+\angle F$$
$$=\angle F+\angle EOF+\angle F=3\angle F.$$

为了作这个圖方便起見，我們还可以設計一种器械（圖 4)：拿兩根有槽的棒（木头或金屬制的都可以)，在 F 点那兒把它們連接在一起，並且使它們能够繞 F 点轉动.再拿兩根一样長的棒，一端連接，像圖上那样嵌在槽里，把 E 端的位置固定下来，使 EF 的長等於 EO，C 点和 O 点却可以隨 F 角的張大或縮小自由地在槽里滑动.这样，我們只要自由調节 $\angle COB$ 使同我們要分的角一

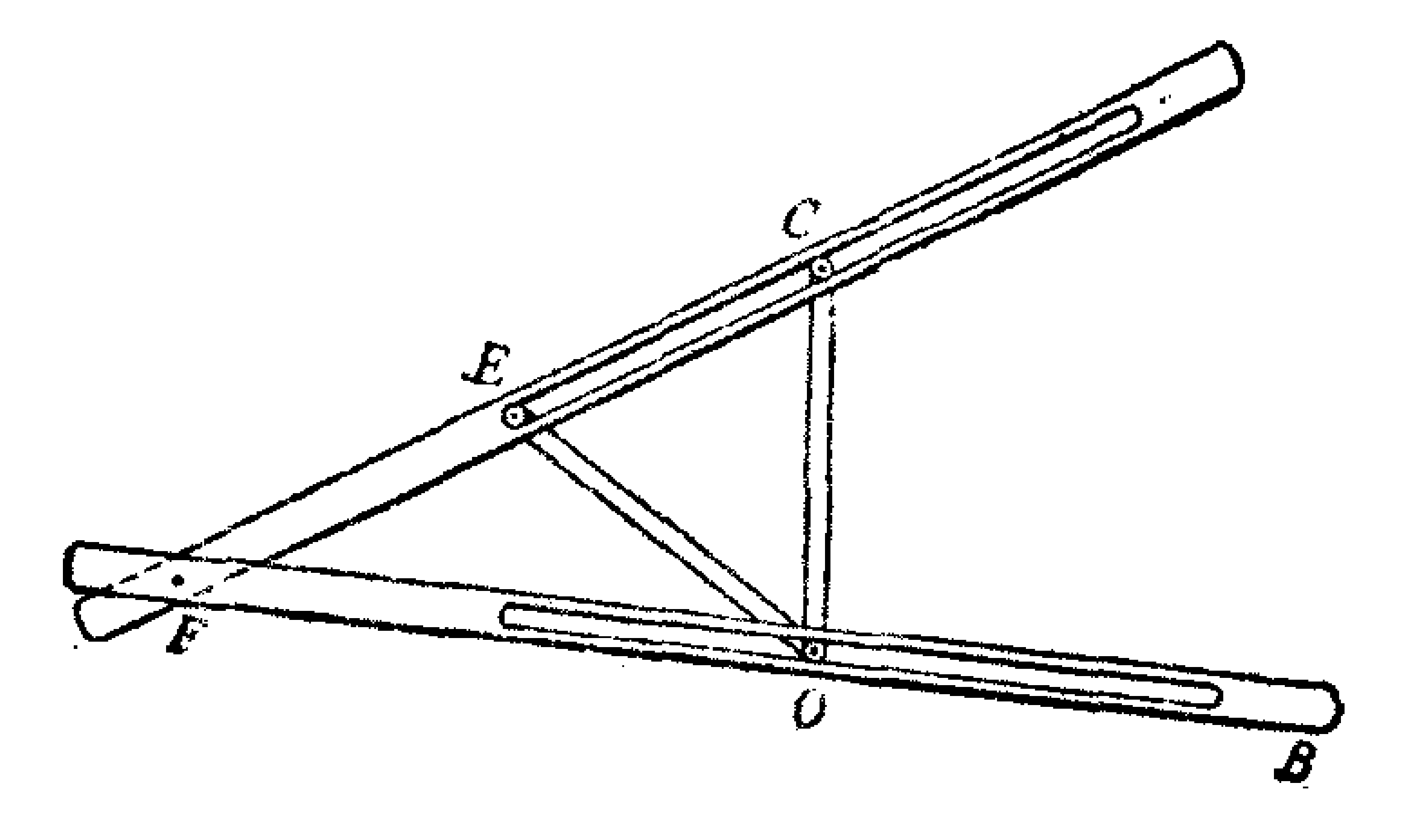


圖 4.

样大，那末 $\angle F$ 就是所要分的角的三分之一。

这种器械有人就叫它做"三分角器"。

"想不到这个問題有这样悠久的历史，在二千多年前就有人注意它了，倒眞有意思．但是为了三等分一角，还要另外制作一个器械，这就未免太麻煩了！"你可能会有这样的感觉．

是的，这眞是一个古老的几何作圖題．誰都知道，古代希臘是一个研究学术風气很盛的国家，有过不少的哲学家和数学家，如柏拉圖、亞理斯多德、德謨頡利圖、托勒玫、芝諾等，就是我們几何学的老祖宗欧几里得，也是这个时代的人．这个看来似乎很簡便的作圖問題，古代数学家也的确为它絞过腦汁，还为它热烈地爭辯过，而且因而發現了数学上一些别的問題．

至於上面所說的三分角器，倒並不是一定要你去制出来，这不过是說明这个問題的一种解法罢了．你在实际工作当中眞正遇到这个問題的时候，我前面已經說过，用量角器也可以把它近似地解决了．其实也不一定只有上面这样的一种三分角器，我現在再另外来介紹一种：

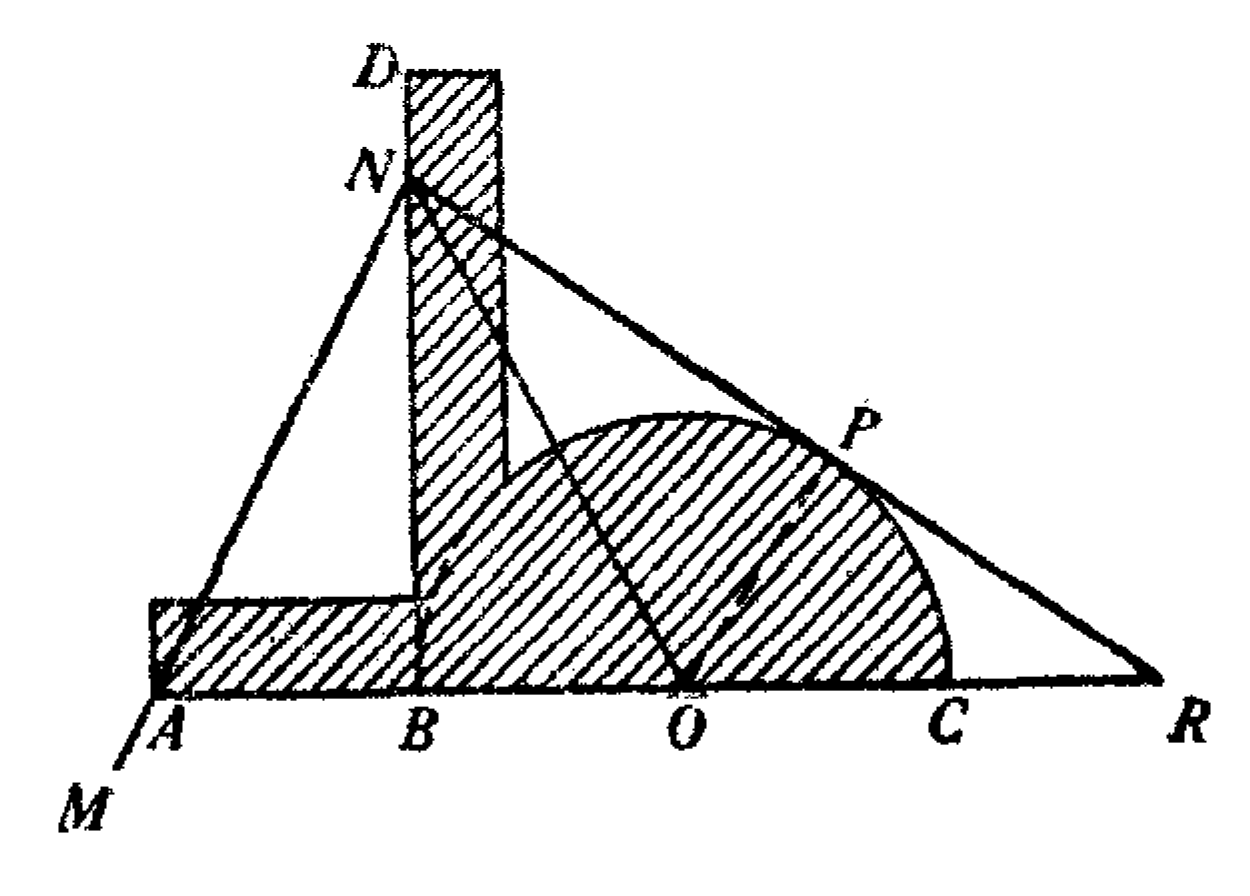


圖 5.

用一張硬紙板或馬口鉄片，剪成像圖 5 上有陰影部分的形狀，跟半圓相接的一段 AB，長度和半圓的半徑相等，另一段 BD 要跟 AC 垂直，並且在 B 点跟半圓相切，BD 可以稍

許長一些.有了这个,我們便能进行三等分角了.

假定我們要把一个 $\angle MNR$ 分成三等分，先把 $\angle MNR$ 的角頂 N 放在 BD 線上面、逐步移动 N 在 BD 線上的位置，使 $\angle MNR$ 的一边通过 A 点，另一边却跟半圓相切. 然后从 N 到 B 、从 N 到 O 作兩条直線 NB 和 NO, 於是这个角就被三等分了，因为我們很容易証明：

$$\text{直角三角形 } ABN \cong \text{直角三角形 } OBN$$

$$\cong \text{直角三角形 } OPN.$$

所以 $\angle ANB = \angle ONB = \angle ONP$.

所以 $\angle ANB = \frac{1}{3}\angle MNR$.

有人把这塊板叫做"三分角板"，用三分角板比用上面那种三分角器簡單.

或許你認为这个方法虽然比上面的簡單，但畢竟还要特制一个工具，还是麻煩.

那我还可以介紹你应用現成的工具来解这个問題的方法.

你总該有一副三角板吧，学習几何的人是少不了它的，一塊是等腰直角三角形的，一塊是兩个銳角分別是 30°、60° 的. 通常一副三角板，第一塊的斜边恰巧等於第二塊的長直角边. 利用这一副三角板，我們也可以来三等分一角.

如圖 6，$\angle AOB$ 是所要分的角，作它的一边 OB 的平行線 XY，OB 和 XY 中間的距离是任意長 l，於是就用一副三角板，使兩个直角頂相合於 C，一塊的長直角边跟另一塊的直角边相重合如 CG，另一組直角边相接而成直線 HK，在 CH、

CK 上取 CD、CE 使各等於 l，把这样拼凑的兩塊三角板放到 $\angle AOB$ 上，小心移动它們的位置，使 CG 通过 O 点，而 D 和 E 分别落在 OA 和 XY 兩条線上，那末 OC 和 OE 就是所求的三等分線了，因为我們很容易証得：

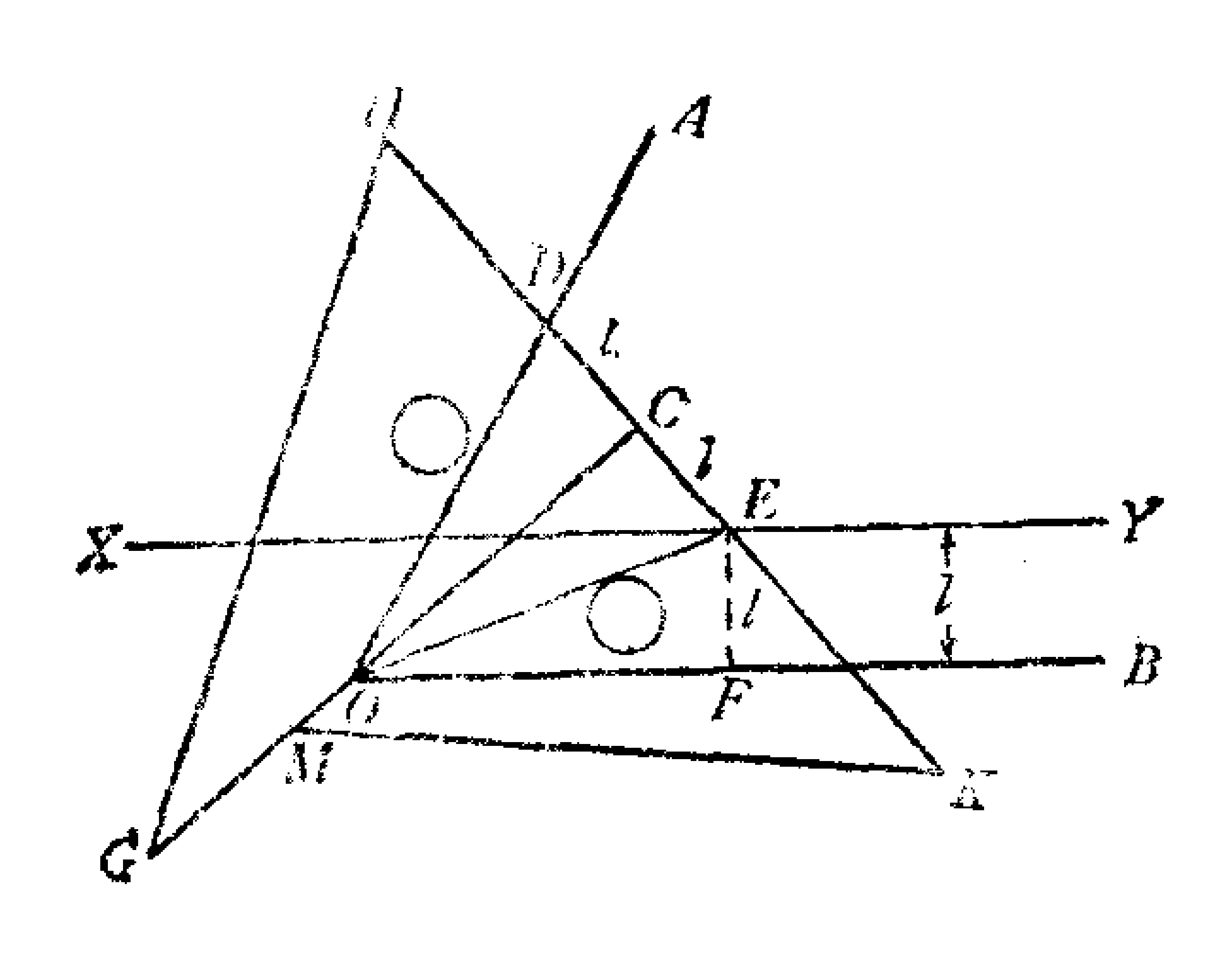


圖 6.

$$\text{直角三角形 } DCO \cong \text{直角三角形 } ECO$$
$$\cong \text{直角三角形 } EFO.$$

所以 $$\angle DOC = \angle EOC = \angle EOF.$$

假如你把木工使用的角尺依照上面的方法来做，也可以得到同样的結果.

你看上面的几种三等分角的方法怎样？它們都是根据几何圖形的性質，应用一些工具把这个問題解决的.

三 还是有可能

有刻度的直尺可以很順利地解决这个問題.

你說：“我从来沒有想到怎样用一些工具来解这个問題．我也練習过許多作圖問題，有些問題在表面上确实比这問題要复杂得多，但有时候我也把它解决了．几何学上有許多作

圖方法,如奠定基础法,平行移动法,利用对称的方法,軌跡交截的方法,相似作圖法以及代数解析法等等.虽然老师告訴我們,要解决一个作圖問題,不能机械地搬用一些什么方法,但是我总是根据一些几何学上的基本作圖定理和一些几何圖形的性質,沒有用什么特別的工具,只用直尺和圓規把它作出来的.因此,我覺得上面所說的几种方法总似乎不符合几何学上作圖的規矩."

規矩!这兩个字倒引起我想到了我国古代战国时候的一位学者孟轲来了,他曾經說过:"不以規矩,不能成方圓."所謂"規""矩"其实就是用来作圖的兩种工具."矩"就是用来作方形的角尺;"規"就是用来画圓形的圓規.据說从前在山东嘉祥县,曾經發掘出一所汉朝武梁祠的石室,里面有一幅石雕的人面蛇身像,題名"伏羲氏手执矩,女媧氏手执規".这虽然是神話,但也可以說明"規""矩"在很古的时候就被用来做画圖的工具了.你所說的要符合几何学上的作圖規矩,不就是用"規""矩"来作圖嗎?

"正是这个意思,"你会回答我說.你还向我說明:"我們学習几何作圖的时候,就老是只应用直尺和圓規,如把兩点連成一線段,把一線段延長,或是作一直線的平行線或垂直線,或是用圓規画一段弧或一个圓,这样,經过一些不同的手續,就把要作的圖形作出了.結果再用一些几何定理来証明它的作法是准确的."

这样說来,問題又推进一步了.就是說:不許用什么特制的工具,而要用直尺和圓規把一个任意角三等分.那我們就

继續来研究吧!

只用直尺和圓規,要三等分一个角还是有可能!

有人曾經採用过这样的方法:如圖 7. $\angle AOB$ 是一个所要分的角. 用角頂 O 做圓心,在角的一边 OA 上取一任意長的線段 OR 做半徑,画一个圓.再延長 AO 跟圓相交於 C 点. 然后用 C 做定点,用直尺和刚才画圓的圓規合併移动,使过 C 点作出这样的一个線段,它跟圓和 OB 線分别交於 D、E 兩点,而 DE 恰巧等於圓的半徑的長,就是使圓規的兩脚恰巧能落在 D、E 兩点上.再作 $OF \parallel CE$,那末 OF 就是 $\angle AOB$ 里的一条三等分線了. 因为,假如連 OD,

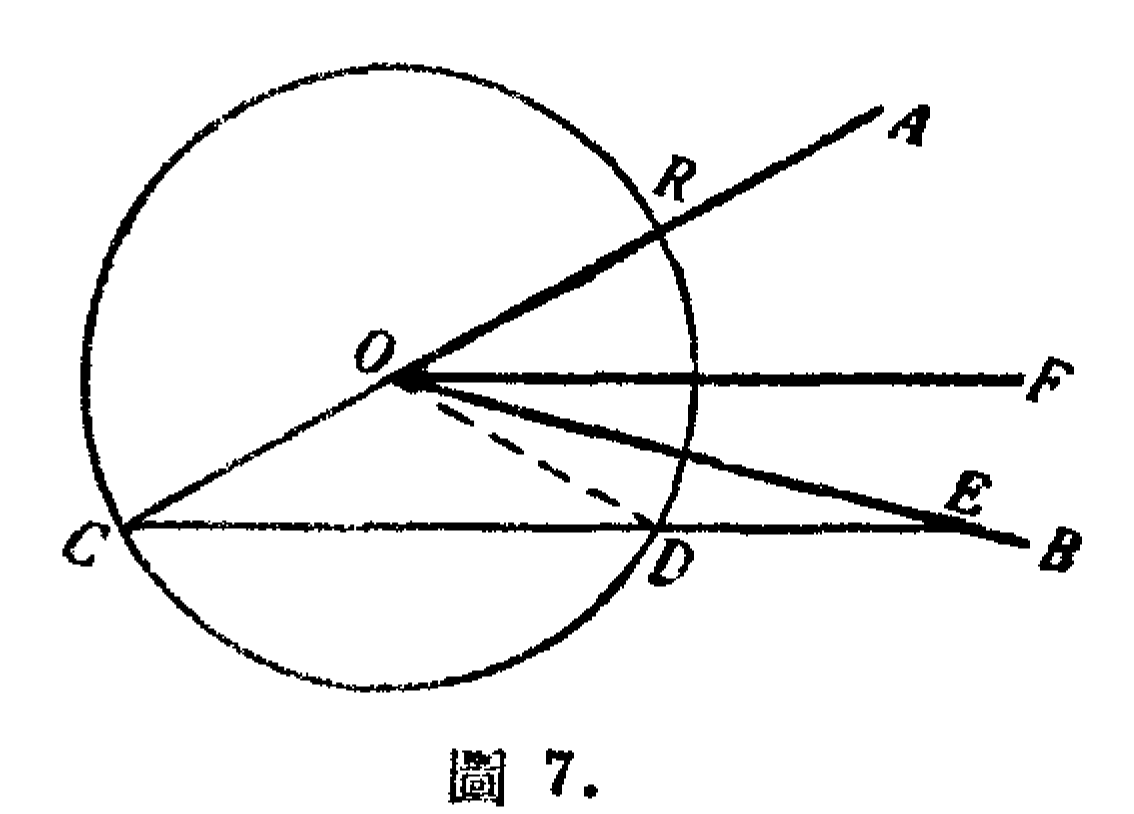


圖 7.

$$\angle AOB = \angle C + \angle OEC = \angle ODC + \angle OEC$$
$$= \angle DOE + \angle OED + \angle OEC = 3\angle OEC = 3\angle EOF.$$

所以
$$\angle FOB = \frac{1}{3}\angle AOB.$$

更有趣的,有人还只用一根直尺,就能把一个任意角三等分,不过他在直尺上事先刻上兩个点,这兩个点間的距离是可以由作圖的人任意选取的. 当然,既选定之后,那末在作圖的过程当中就不能再变更了. 我們平常所用的直尺不是有現成的刻度嗎? 那就更好,你只要在心里任意認定一段長度就好了,这个長度我們就叫它做單位長. 只要用这样一根直尺,就能很順利地来把一个任意角三等分了.

如圖 8, $\angle AOB$ 是所要分的角. 先在 $\angle AOB$ 的一边 OA

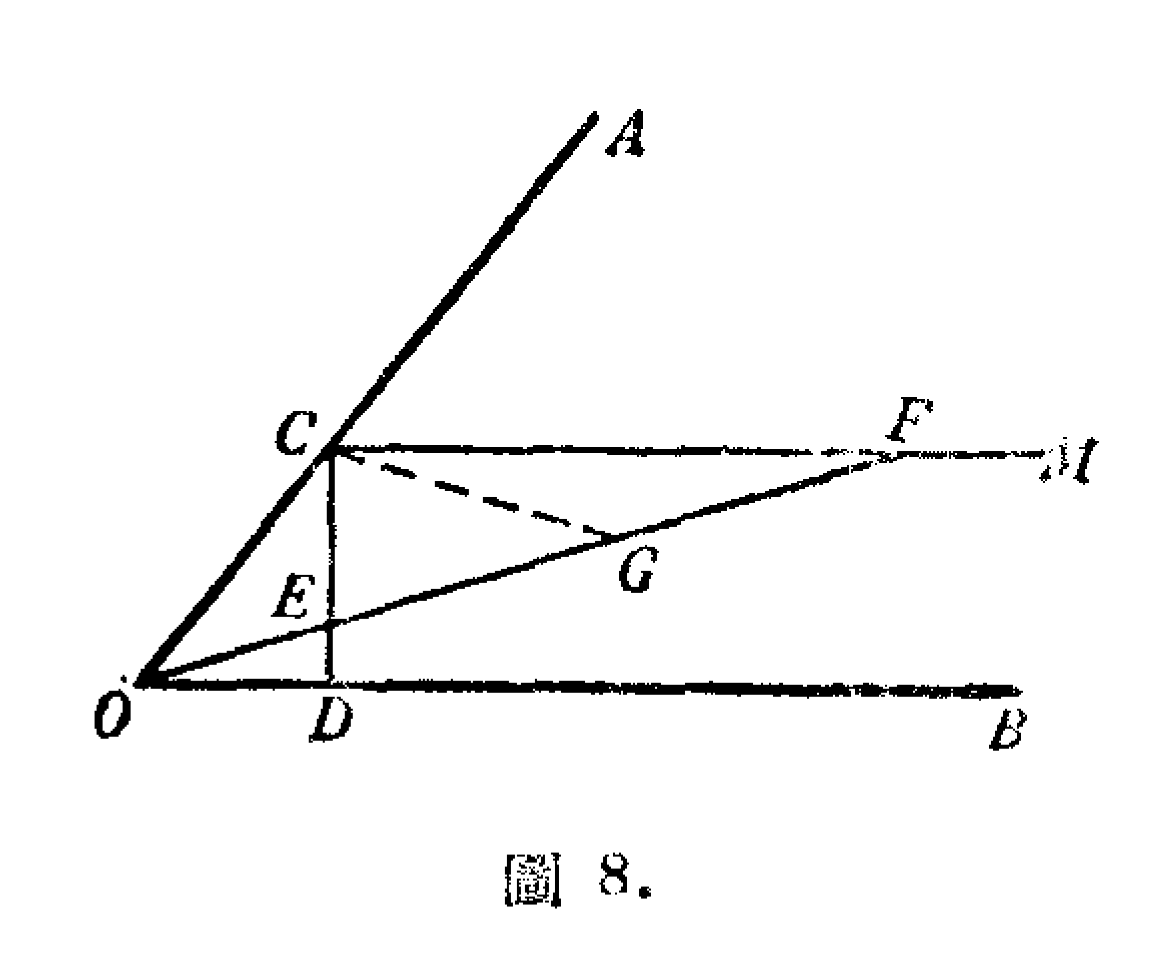


圖 8.

上截取一段 OC，使它等於單位長的一半，再从 C 点作 $CM \parallel OB$，作 $CD \perp OB$，然后再过 O 点作一条直線 OF 分别截 CD 和 CM 於 E、F 兩点，使 EF 等於單位長．有上面所說的直尺，这种作法是完全可能的，只要把直尺繞 O 点旋轉，同时留意直尺上那段單位長度兩端的刻度，讓它們分别落在 CD、CM 兩線上就是了．再連 C 和 EF 的中点 G，我們就很容易証明 OF 就是 $\angle AOB$ 的一条三等分線，因为在直角三角形 ECF 里，

$$CG=\frac{1}{2}EF,$$

而
$$OC=\frac{1}{2}EF,$$

所以
$$OC=CG=FG,$$

$$\angle FOB=\angle CFO=\angle FCG=\frac{1}{2}\angle CGO=\frac{1}{2}\angle COG.$$

也就是
$$\angle FOB=\frac{1}{3}\angle AOB.$$

这兩个証明或許会使你想起，你在几何課里曾經做过这样的兩个練習．課本上是把圖形画好的，只是根据圖形敍述了有哪些条件，要求能証出 $\angle FOB=\frac{1}{3}\angle AOB$，而你也就沒有去考慮这兩个圖形是怎样作出的，只是照書本上依样画葫蘆地画了下来．現在經过我一提起，你一定恍然大悟，原来这些問題就跟三等分一任意角的作圖有很大的关系．

你把这兩种方法仔細推敲一下，可能还看得出来：上面說的第一种方法，其实同阿基米德的方法差不多。你只要把圖7上的BO延長，再把圖轉180°，那上半部就跟圖3完全一样。而且，上面所說的圖7、圖8兩种方法，也是基本上相同的，圖7上的$OCDE$部分就跟圖8上的$COGF$部分一样。如果在第一种方法里，不用直尺和圓規合併移动，而是在直尺上刻D、E兩点，使DE等於半徑OR的長，那就可以用这直尺作出CDE这条線。再說在第二种方法里，如果把圓規張开到兩脚間距离等於半徑OC的兩倍，然后再跟直尺合併使用，也可以作出OEF这条線，使$EF=2OC$。

所以，只用直尺和圓規，把它合併使用，或者就只要一根有刻度的直尺，也可以解决这个三等分一角的問題。

四 "規""矩"的規矩

欧氏几何的作圖工具和它們的使用法。

"我眞像丈二和尙摸不着头脑了！想不到这样一个問題，解决的方法有这許多，时鐘帮助我們解决了这个問題，用特制的工具也解决了这个問題，現在，直尺和圓規甚至連一根有刻度的直尺也都能滿意地把一个任意角三等分了，但是我們却都說这是一个不可能作圖問題，这到底是怎么一回事呢？"你会提出来問我。

那請你慢慢地听我講吧！我想先提出一个常識性的問題

来談談，假如我問你:“人类会不会在空中飞行呢?”那你大概会回答:“这是不可能的，人又沒有翅膀，怎能在空中飞行呢?”但你經过思索之后，可能又这样說了:“現今科学不断地向前發展，人利用气球、飞艇、飞机、火箭等工具，也可以說已經能在空中飞行了．而且苏联現在还正在研究人造衛星呢!”不錯，你这兩个回答就說明了一点:我們判断一个問題的可能不可能解决，应該先考虑在什么条件之下，因为，有些問題在某种条件下完全可以解决，而在另一种条件下，就不可能解决．像人类飞行的問題，要不使用任何工具，人类是無法在空中飞行的，但是使用了各种工具，人类就能在空中自由飞行了．現在我們所研究的三等分角的問題，也正是这样的．如果不受几何作圖工具和作圖方法的限制，是可以解决的，而且很容易，但是如果只限於应用直尺和圓規，要想来把它作出，那是不可能的．

“剛才不是已經用直尺和圓規把它作出了嗎?”你一定覺得奇怪．

是的，我正要告訴你，上面所用直尺和圓規的作圖方法，还是不合几何学上的作圖規矩的．我們不是談到規矩嗎?“規”“矩”兩个字單独来講，可以說是几何学上作圖所使用的工具，但是把“規矩”兩个字連在一起講，也就是所規定的使用工具的方法．你眞想不到吧，居然“規”“矩”还有“規矩”呢!

几何学上告訴我們，直尺和圓規是欧几里得几何作圖的特定工具，並且規定了它們使用的方法是这样:直尺有兩种用法，就是(1)兩点之間可以連結成一个線段，(2)線段可以向

兩方任意地延長．圓規的用法是用任意一点做中心，用任意長的半徑可以画一段弧或一个圓．

我相信你是知道这一点的．但是还得注意一些"規矩"，就是我們几何学上所用的直尺是沒有刻度的，並且不能把直尺和圓規同时在一起合併使用．我們有了这个限制，前面所說的兩种方法就显然不符合几何作圖的規矩了．为了进一步說明这一点，我想用几何課本上一个常見的作圖題做例子来談一談：

过圓外的一已知点，作圓的割線，使圓里面的線段等於已知長．

当然已知線段的長应該小於或等於圓的直徑．

現在讓我来說出它的作法：

如圖 9，把直尺繞圓外的已知点 P 轉动，同时把圓規的兩脚間距离張到跟已知長 a 一样，然后把圓規緊靠着直尺，並且隨直尺同时移动，使一脚始終落在圓周上，直到另一脚也落在圓周上为止，於是停止移动直尺，沿直尺画下直線，就是所求的割線．

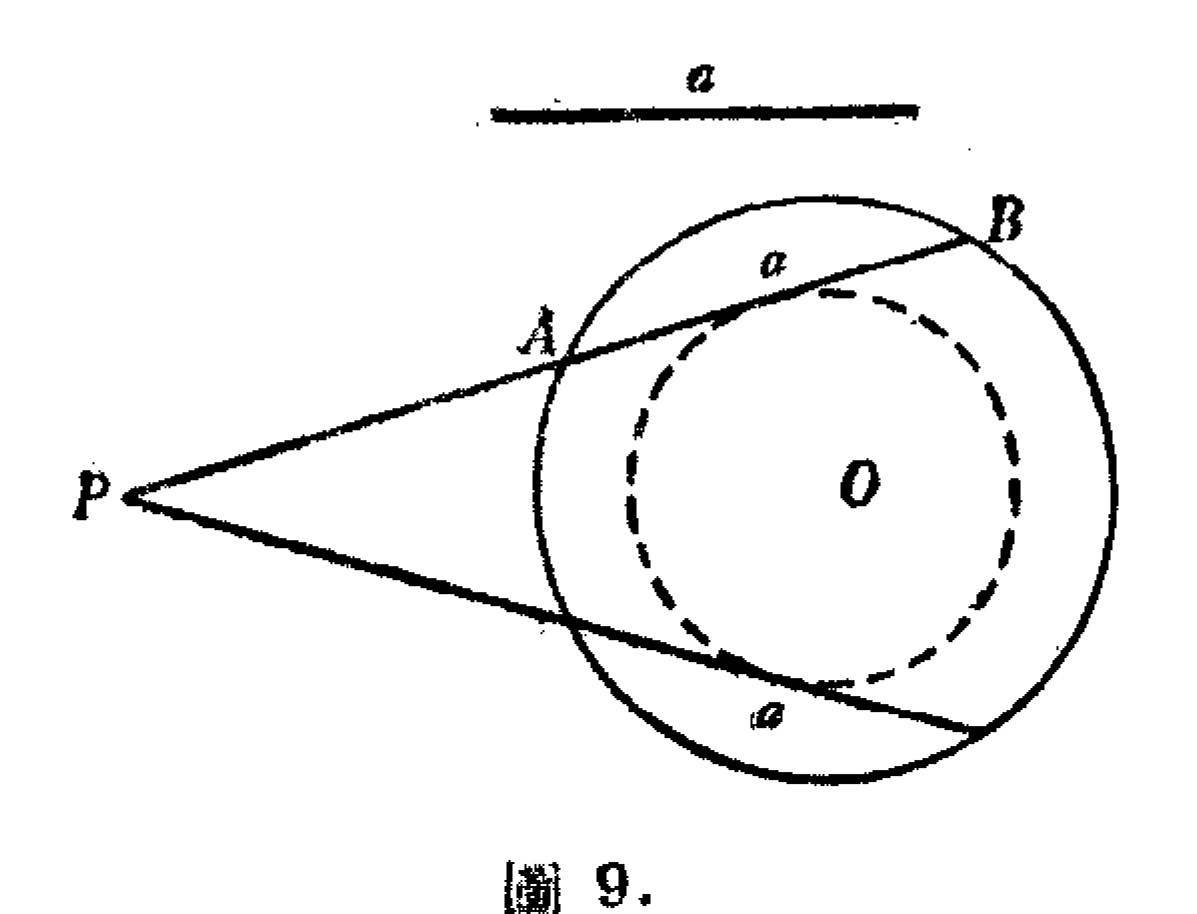


圖 9.

你一定会笑着說："这种作圖方法怎么行呢？假如眞有人这样作圖，一定会受到老师批評的．我認为正确的作法应該是这样：在圓里面任作一弦使等於已知長，然后用圓心到这弦的距离做半徑，作已知圓的同心圓，再从 P 点引这同心圓的

兩切線,那末这兩線就是所求的公切線了."

你說的完全正确,通过这个比較普通而又簡單的作圖題,我們应該更理解上面說的使用規矩的規矩了. 其次,我还要告訴你另外一个規矩,在几何作圖的时候,直尺和圓規是不能使用無限多次的.

你覺得这个規矩好像沒有必要吧? 你說:"假如一个作圖問題,需要使用無限多次的圓規直尺才能得到解决的話,那末我們一輩子也沒有办法实現这个作圖,而且我想也决不会有这样的作圖問題."

这倒也不能这样說. 你要知道如果沒有这一个限制,假如眞的允許我們使用無限多次直尺和圓規的話,那末三等分角的問題虽不能实現作圖,在理論上却是完全可以解决的. 在数学上有一些問題,根据已給条件,只要在理論上能够解决,也就算它已經解决了.

現在我們不妨来看一看,假如直尺和圓規可以使用無限多次,三等分角的問題应該怎样来解决.

你总該知道用直尺圓規可以把一个任意角二等分吧,这是一个基本作圖問題,用这个方法我們就很容易把一个已知角四等分、八等分、十六等分……2^n等分(n是正整数).

你再想一想代数上告訴我們的無窮遞降等比級数的求和公式:初項是a,公比是q的时候,和

$$S_\infty=\frac{a}{1-q}\quad(|q|<1).$$

根据上面的一些知識,我們可以着手三等分一角了. 假

如$\angle AOB$是所給的角，那末作法就是这样：先把$\angle AOB$二等分，在$\frac{1}{2}\angle AOB$上減去$\frac{1}{4}\angle AOB$，再加上$\frac{1}{8}\angle AOB$，再減去$\frac{1}{16}\angle AOB$，再加上$\frac{1}{32}\angle AOB$，照这样的規律逐步作下去，所得出的角就越来越趋近所給角的三分之一。如果繼續作到無限多次，那末也就能得出$\frac{1}{3}\angle AOB$了．因为，

$$\angle AOB\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cdots\cdots\right)$$
$$=\angle AOB\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{3}\angle AOB.$$

現在我們該小結一下了：根据上面所談的，知道假如不受作圖方法的任何限制，我們完全可能解决三等分角这一个問題，而且解决的方法多得很：或者用特制的工具；或者用有刻度的直尺；或者改变几何上使用直尺和圓規的方法；以后我們还会知道在数学上有更多的方法解决这个問題．至於只限於用直尺和圓規而且使用方法上又加上了几点限制，那要三等分一角才是不可能的事．

五　兩个“为什么?”

几何作圖为什么要限定用直尺和圓規？　为什么限定用直尺和圓規就不可能三等分一角？

“为什么几何作圖的工具一定要限定用直尺和圓規呢？又

为什么限定用直尺和圓規就不可能三等分一角呢?"

我估計到你必然会提出这兩个問題的，因为爱好学習的人往往对問題希望能够徹底地理解．但是这兩个問題是沒法一下子就回答出来的．

我們先来談一談第一个問題吧．

要說明这一点，得說一下几何学的历史．

我們都知道，几何学跟其他科学一样，是由於人类生产上的实际需要而产生的，只要哪里有人类文化在成長，哪里就会产生几何学．人类在長期的生产斗爭过程当中，在漁獵、耕地、測量、观察天体等工作当中，經过亿万次的經驗，得来了关於圖形的概念，也逐漸認識了圖形的性質，这些知識就是几何学的萌芽．許多書上都这样說：在古代的埃及，由於尼罗河每年的定期泛濫，冲坏了田地的界線，在泛濫以后，需要把田地重新划分，这样，就需要測量地面上的某些距离和面积，於是就产生了几何学．其实这样的認識是片面的，我們知道古老的国家如印度、巴比倫，也很早就有不少的几何学知識，而我們的祖国，对於几何学的研究也有几千年历史，並且有很多的偉大成就．在黑陶文化时期（公元前1000年），陶器的花紋就有菱形、正方形和圓内接正方形等几何圖案．在墨翟（公元前480年–公元前390年）所著的書里，就提到了圓的定义和几何学方面的許多别的知識．在古代算書“九章算术”里，載有計算各种形狀的土地面积和物体体积的方法．在另一本古代算書“周髀算經”里，已經講到关於直角三角形各边間的关系的勾股弦定理．又如我国南北朝时候的数学家祖冲之，曾經

求得圓周率 π 在 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$ 之間，用 $\frac{355}{113}$ 做 π 的近似値在数学史上也是有重大意义的。

应該指出：古代的一些几何知識是零碎的，片断的，不全面的。直到公元前 330 年-公元前 275 年(?)，希臘有一位偉大的数学家欧几里得，特别詳細地研究了这一門科学，並且插进了自己研究的一些材料，把它系統化起来，写了一本書，叫做"几何原本"。这本書对於几何学的發展和几何学的教学，都起了很大的作用，直到現在，人們还根据它来編写几何学的課本。我們現在在中学里所学習的几何学，内容和二千多年前欧几里得所建立起来的几何学，基本上沒有什么不同。所以这种几何学也叫做欧几里得几何学，或者叫欧氏几何学。

人类为了研究圖形的性質，势必要把圖形先画出来。既要作圖，就需要作圖的工具。古时候人們所能利用的工具是哪些呢？我們也能想像到的，他們一定观察到直線圖形里最簡單的是"線段"，曲線圖形里最簡單的是"圓"，很自然地他們就想去找出能画線段和圓的工具。根据他們生活的体驗，用一根比較平直的木条，就能在沙地上画出一条線段，用一条树椏枝就能画一个比較好的圓。木条和椏枝是随处都找得到的，这种自然工具使用起来既方便又省事。發展到后来，人們也会用天然的比較平直的木条加工成直尺，並且会做出像树椏枝那样而又可以調节張开程度大小的工具——圓規——来。所以在欧几里得几何学里也就把这兩种工具——直尺和圓規——当做几何作圖的特定工具，並且根据它們作圖实現的过程，又規定了它們的用法，这就是欧几里得所説的"公法"。

我想你一定又会这样問了："科学不斷地向前發展，当然几何学也不例外，到了目前，我們画圖形的工具就多啦！有三角板，有精确刻度的直尺，有丁字尺，可以画出很小或很大的圓的精制的圓規，量角器，对角線尺，比例規和曲線板等，要画垂線、平行線、角的平分線或者縮放一些圖形，利用这些工具眞是易如反掌，又为什么要拘泥於欧氏几何里限定用直尺和圓規兩种工具的作法呢？这不是墨守成規嗎？"

其实，要解决这个疑問，只要明确認識一下我們学習几何的目的就行了．学習几何的目的，主要可以分兩方面来講：一方面通过几何知識的学習，使我們能利用这些知識来解决实际問題，使理論跟实踐緊密地結合起来．关於这点，我不想多談．另一方面，就是通过圖形的观察，培养自己对空間的想像力，又通过圖形性質的研究，培养自己的邏輯思維力．但是要想达到这个要求，那就必須讓我們有充分的思考机会．現在在工具的使用上加上限制，要我們憑着有限的工具去解决几何上的一些問題，無疑会使我們不得不多动腦筋．就在这种劳动的过程当中，可以培养我們精細的邏輯思維力，和丰富的想像力．法国有一位数学家拉普拉斯說："几何如强弓"，虽然他沒有指出几何在实踐上的作用，但是在發展智慧和邏輯思維这方面，这句話可以說是很恰当的．因此，在几何作圖方面，現在还像过去一样限定用直尺和圓規，是有它的一定意义的．

也許你还要問："工程制圖为什么可以尽量利用便利的工具呢？"这一个問題很容易回答．因为工程制圖的目的是为了

制出圖来做施工时候的根据，能够方便地制出所需要的圖来，就能提高工作效率，因此制圖的工具可以不受什么限制．目的不同，当然要求也不同了！假如有人認为在几何学上用直尺和圓規沒有办法来三等分一角，在实际工作当中遇到需要解决这样問題的时候，也硬說沒有办法，那就未免失之拘泥了！

难怪平时老师叫大家解几何題的时候，不止一次地告訴大家要多动腦筋，多独立思考，不要有依賴思想，不要因失敗而灰心，道理就在这里．

其实，不但我們学習几何学是这样，学習别的科目也应該是这样．不过几何学似乎更有訓練我們思考的作用．現在，我們得进一步回答你所提出的第二个問題了，就是为什么限定用直尺和圓規就不可能三等分一角呢？要說明它的道理，倒使我为难了，因为这是一个理論比較深邃的問題．但是尽管这样，我还想尽我的力量把这个問題深入淺出地談一談．

六 "代数""几何"併了家

第卡兒坐标的引进．平面上的点和实数組的"一对一的对应"关系．

有人說："我对学習几何特别感到兴趣，但是对代数却覺得乏味．"也有人說："代数在实际工作上比几何应用广，我們应該好好学習代数．"

这些說法都是錯誤的．固然，代数跟几何所研究的对象

是有区别的,但是它們畢竟都是数学的分科,事实上是紧密联系着的. 因此,假如把这兩門科目机械地分割或者偏廢哪一面,那对你学習数学一定会帶来不小的障碍.譬如說,几何学上的有公度和無公度線段的理論,就是同代数学上有理数和無理数的概念相联系的. 在我們下面研究用直尺和圓規为什么不能三等分角的时候,你对这点或許会有更大的体会.

以前我不是說过,用直尺和圓規来三等分角的問題已經有悠久的历史嗎? 远在公元前四五百年,大約在我国周朝的时候,希臘的一些哲学家和数学家就开始研究这个問題. 大概为了这个問題在表面上很簡單,而在作圖的时候又有極大困难的緣故,引起了数学家們的特别重視,还曾經有过不少的辯論,从而發現了别的几何圖形的一些性質,然而問題本身始終沒有获得解决.直到公元1637年,大約在我国明朝末年,法国一位大数学家笛卡兒發現了新的处理几何圖形的方法,对这个二千多年来的古老的作圖問題,总算开始找到了眉目.

笛卡兒究竟用什么样的新方法来处理几何圖形的性質呢? 說来你是完全知道的,在代数学里,我們不是曾經学習过一次和二次函数的圖象嗎? 在平面上取兩条互相垂直的直線,叫做坐标軸,水平的一条叫横軸,豎直的一条叫縱軸,它們的交点O叫做坐标原点,横軸和縱軸把平面分成四部分,叫做四个象限. 於是平面上任一点的位置都可以用它跟坐标軸的垂直距离来决定,跟縱軸的垂直距离叫横坐标,常用x来代表,跟横軸的垂直距离叫縱坐标,常用y来代表. 这种坐标方法因为是笛卡兒首先提出的,所以又叫"笛卡兒坐标".

我給你一个簡單的函数式，要你在坐标上描出它的圖象来，这你或許是非常熟悉的．你在描出函数圖象的过程当中，不是先要求得許多組 x、y 的值嗎？有了一組 x、y 的值，在坐标上就可以描出一个位置确定的点来．从描点的經驗知道，一組 x、y 的值一定能描出一点，而且只能描出一点，反过来一点一定有一組坐标，也只能有一組坐标．这些 x、y 的值，我們可以取有理数，也可以取無理数，有理数和無理数都叫做实数，因此，我們把这些一組一組的 x、y 的值叫做实数組．这样，用了笛卡兒坐标，我們可以得到一个結論：

对於平面上任一点 P，必有一实数組 x、y 跟它对应，也只有一实数組 x、y 跟它对应．不同的兩点 P_1 和 P_2 各跟不同的实数組 x_1、y_1 和 x_2、y_2 对应．反过来說也是成立的：对於任一实数組 x、y，在坐标的平面上必有一点 P 跟它对应，而且也只有一点 P 跟它对应．不同的兩实数組 x_1、y_1 和 x_2、y_2 各跟不同的兩点 P_1 和 P_2 对应．

上面这个結論也可以簡單地說：几何学里的平面上的点，可以用代数学里的实数組 x、y 来表示，反过来，代数学里的实数組 x、y，也可以用几何学里平面上的点来表示．

这样一来，代数学里含有兩变数 x、y 的方程，如 $y=kx+b$，$y=ax^2$ 等，就可以根据上面的理論在坐标上画出直線或者是拋物線等的几何圖形了．

利用坐标来画出代数学里函数式的几何圖形的方法，在今天許多实际工作当中广泛地应用着，几乎成了工程技术人員的常識．但是最初提出这种方法确实是一件艰难的工作．

在笛卡兒以前，許多数学家認为代数学里所研究的"数"跟几何学里所研究的"形"完全是兩回事．到了笛卡兒才發現"数"和"形"的不可分割的內在联系．用了这种方法，研究变数就比較容易了．恩格斯非常推崇笛卡兒，他說："笛卡兒的变数是数学中的轉折点．因此运动和辯証法便进入了数学"①，这就足够說明这个發現的意义的偉大了．从此，代数跟几何就併了家，打破了过去存在着的鴻溝，一切几何問題都可以化成代数問題，然后用代数的运算推出几何的結論．据說笛卡兒提出坐标的目的之一，也是为了想解决古代几何学里一些無法解决的問題．

七 圖形变方程

笛卡兒坐标上的直線方程和圓的方程．

你听到这里，或許已經等得不耐煩了，你說："关於函数的圖象，代数上面也学習过不少，如一次函数、二次函数、指数函数、对数函数等，都可以利用坐标来描述它們运动变化的規律，但是用了坐标，又怎么能解决我們的三等分角問題呢?"

可惜我还不能一下子就回答这个問題．前面我所說的，还只說明了"代数"跟"几何"的联系，至於怎样来解决我們的三等分角問題，还需要更多的知識，不过現在我們已經有条件

① 自然辯証法，1955年人民出版社譯本，217頁．

进一步研究：在欧氏几何里限定用直尺和圓規来作圖，直尺和圓規的作圖本領究竟有多大呢？

你覚得我这句話有些奇怪吧！你会說："这不是早就知道了嗎？兩点間可以用直尺連結成一个線段，还可以用它把線段向兩方任意地延長；已知圓心和半徑，可以用圓規作出一个圓或一段弧."

是的，不过我們只知道用直尺可以作直線、用圓規可以作圓还不够．我們还得进一步研究，应用直尺和圓規究竟可以画出哪些圖形来．譬如說，我們已經知道用它可以作出正方形、五角星等．要判断这一点，單憑直尺和圓規的使用方法和一些簡單的作圖定理，是不够的．假如我們能把直尺和圓規所作出的直線和圓翻譯成代数上的問題，然后由代数运算得出結論，那就比較明确了．

那我們現在就来做翻譯工作吧！

我們已經知道用了笛卡兒坐标以后，平面上一个已知点的位置可以用一組实数来表示．坐标法的应用当然不限於研究有关个别点的位置問題，从这个基本概念出發，我們就能够进一步想出用代数的方法去研究比較复杂的几何圖形——線．我們首先从最簡單的線就是直線研究起，直線就是直尺所能作出的圖形．

如果已知一直線所經过的兩个点，那末，这条直線在平面上的位置就已經完全决定了，因为，經过兩点只有唯一的直線．我們取这兩个已知点 P_1 和 P_2 放在坐标平面上面，那末它們的坐标就可以取一定的数值．現在用 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$

来表示这兩个点(括号里的 x_1, y_1 等表示点的坐标). 我們知道直線可以看做是由連續运动着的点形成的, 它的运动規律是方向不变. 当一点运动的时候, 它的坐标一定随着变动, 我們習慣上把这个动点記作 $P(x,y)$, 它的坐标 x、y 随着 P 点依照方向不变的运动規律而变化.

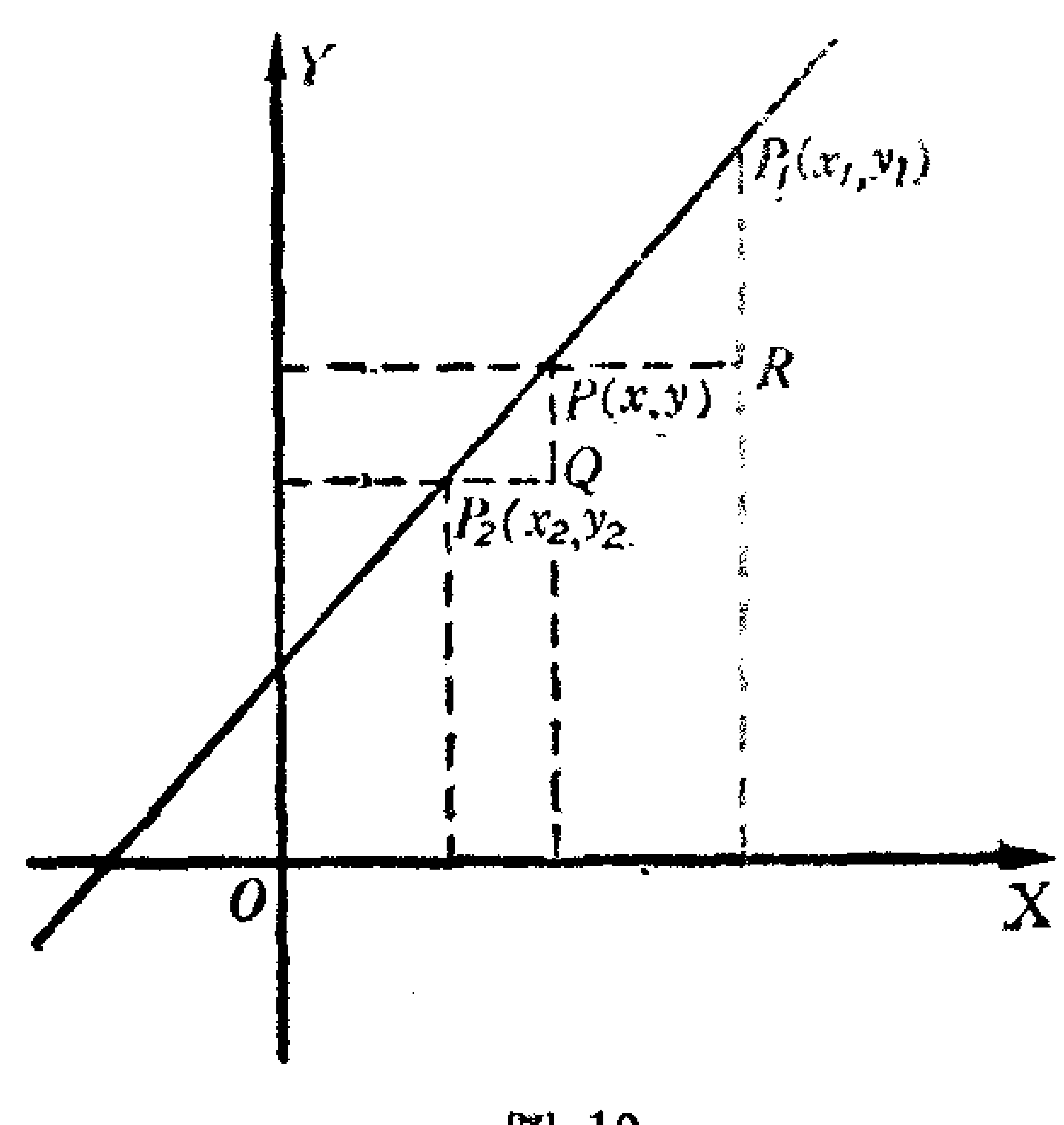


圖 10.

如圖 10, 根据点的运动方向不变的規律, 显然可以得到这样的关系:

$$\angle P_1PR=\angle PP_2Q.$$

从这里我們显然可以找出兩个已知点 P_1 和 P_2 的坐标跟动点 P 的坐标的关系, 因为 $\angle P_1PR$ 和 $\angle PP_2Q$ 既然相等, 它們的正切函数也应該相等:

$$tg\angle P_1PR=tg\angle PP_2Q.$$

从圖 10 看出,

$$tg\angle P_1PR=\frac{y_1-y}{x_1-x},\quad tg\angle PP_2Q=\frac{y-y_2}{x-x_2},$$

所以

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{y-y_2}{x-x_2}.$$

化簡这个方程:

$$(y_1-y)(x-x_2)=(y-y_2)(x_1-x),$$

$$y_1x-xy-x_2y_1+x_2y=x_1y-x_1y_2-xy+y_2x$$

就是 $$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0.$$

我們設:

$$y_1-y_2=A,\ x_2-x_1=B,\ x_1y_2-x_2y_1=C,$$

那末上面的式子就变成了一般的二元一次方程：

$$Ax+By+C=0.$$

这就是一条直線的方程．不論直線在坐标平面上的位置怎么样，都可以用这个方程来表示，不过当直線在某些特殊的情况下，A、B、C 三个数当中可能有等於 0 的：

(1) 假如 $A=0$，也就是 $y_1-y_2=0$，$y_1=y_2$．直線平行於横軸，方程是 $By+C=0$ 或 $y=-\frac{C}{B}$．

(2) 假如 $B=0$，也就是 $x_2-x_1=0$，$x_1=x_2$．直線平行於縱軸，方程是 $Ax+C=0$ 或 $x=-\frac{C}{A}$．

(3) 假如 $C=0$，也就是 $x_1y_2-x_2y_1=0$，或 $x_1y_2=x_2y_1$，或 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$，說明縱坐标同横坐标成正比，也就是直線通过原点，方程是 $Ax+By=0$，原点 (0,0) 是适合这个方程的．

(4) 假如 $A=0$，$C=0$，那末方程是 $By=0$，也就是 $y=0$，既要平行於横軸，又要通过原点，当然就是横軸本身了．

(5) 假如 $B=0$，$C=0$，那末方程是 $Ax=0$，也就是 $x=0$，既要平行於縱軸，又要通过原点，当然就是縱軸本身了．

現在我們可以得出結論：在平面上任取一条直線，一定可以找到一个二元一次方程像 $Ax+By+C=0$ 的形式（A、B、C 都是实数，A 和 B 不能同时等於 0），使得直線上任一点 P 的坐标 x、y 都适合这个方程．

並且，根据我們上面說的点和实数組对应的可逆关系：任取一个二元一次方程，必能而且只能在平面上找到一条直線，使得用适合这个方程的实数組做坐标所描出的点，都在这条

直線上.

現在我們再来看用圓規所能作出的圖形——圓.

圓也可以看做是由連續运动着的点形成的,它的运动規律是跟一个已知点保持一定的距离. 其实圓規的画圓方法就体現了这个运动的过程. 那末圓在坐标上的方程又是怎样呢? 要研究这个問題,我們还得做一个預备工作,就是在坐标平面上怎样算出已知兩点中間的距离.

如圖 11,假如在平面上任取兩点 P 和 Q,分别設它們的坐标是 x_1、y_1 和 x_2、y_2,並且用 d 表示它們中間的距离.

从圖上可以看出,在直角三角形 PQR 里,

$$QR=x_1-x_2,\quad RP=y_1-y_2.$$

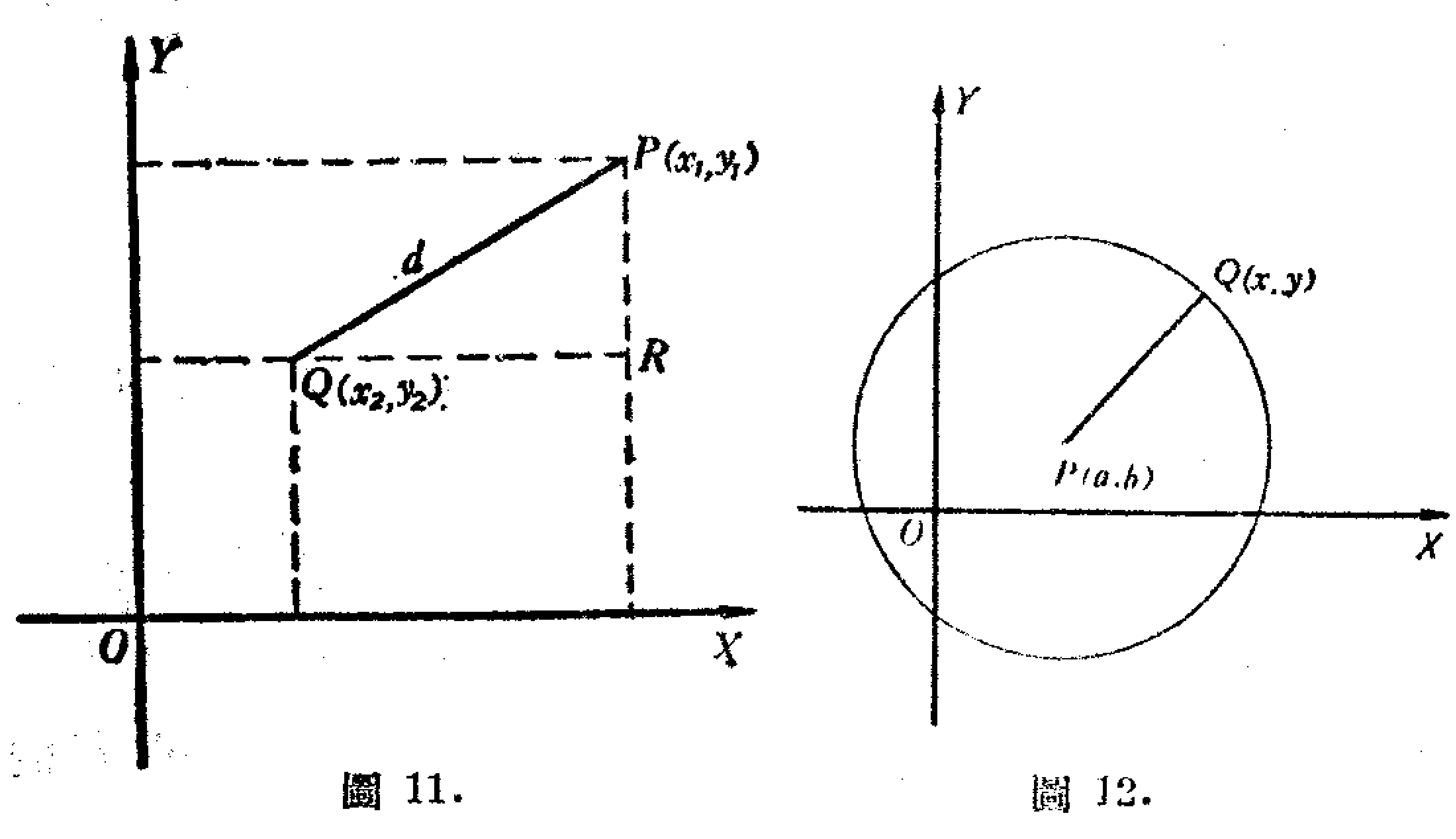


圖 11.　　圖 12.

而由勾股弦定理,

$$PQ^2=QR^2+RP^2,$$

可知 $$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

这便是求兩点 $P(x_1,y_1)$ 和 $Q(x_2,y_2)$ 的距离的公式.

有了它，我們就可以研究圓的方程了．

如圖 12，假如在平面上任取一点 P 做圓心，用 r 做半徑画一个圓，設圓心的坐标是 a、b．圓既然是依照跟一个已知点(就是圓心)保持一定距离(就等於半徑)的規律运动的点形成的，就設这个动点是 Q，它的坐标是 x、y，根据兩点間距离的公式，可以找出已知点 P 跟动点 Q 的坐标之間的关系：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

反过来說用适合这个方程的任何一个实数組 x、y 做坐标所描得的点 Q，跟 P 点的距离既然都是 r，所以 Q 一定在用 P 做圓心、r 做半徑的圓上．

这个方程又可以化成：

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2,$$

或 $$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

我們設 $$-2a=D,\ -2b=E,\ a^2+b^2-r^2=F,$$

那末方程就变成

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

这就是圓的一般方程．显然这是一个含 x、y 兩个变数的二次方程，所以圓是屬於二次曲線的． 为了更清楚地認識圓的方程的特点，我們写出含有兩个变数的完全二次方程：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

把这个方程跟圓的方程比較，我們就可以看出圓的方程有这样兩个特点：

(1) x^2 和 y^2 的系数相同，

(2) 不含 xy 的項．

应該指出：当 $A=C$，而 $A\neq 1$ 的时候，方程是不是仍表示圓呢？回答是肯定的，这只要用系数 A 去除方程的各項，就很容易看出了.

現在，我們又可以得出結論：在平面上任意画一个圓，一定可以找到这样一个二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，使得圓上任一点 Q 的坐标 x、y 都适合这个方程. 並且反过来也成立：任取这样一个二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，必能而且只能在平面上找到一个圓，使得用适合这个方程的实数組做坐标所描出的点，都在这个圓上.

我想你大概以前沒有想到过吧，当你在学習几何的时候，一定經常用直尺和圓規作几何圖形，其实在你作圖的时候，就好像在写下了許多的直線方程和圓的方程；而当你学習代数的时候，一定經常在写方程 $Ax+By+C=0$ 和 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其实在你写这些方程的时候，也好像在画下了許多条直線和許多个圓弧. 所以根据上面的討論，我們可以把欧几里得几何学里直尺和圓規的作圖法翻譯成代数学的語言，就像下面的一个表：

几何学	代数学
1. 兩点之間可以連結成直線. (已知兩点 P_1 和 P_2，可以作直線 l.)	1. 已知兩个实数組 x_1、y_1 和 x_2、y_2，可以得到一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$，使 $Ax_1+By_1+C=0$，$Ax_2+By_2+C=0$. ($A=y_1-y_2$，$B=x_2-x_1$，$C=x_1y_2-x_2y_1$.)

2. 線段可以向兩方任意地延長.	2. 就是不限制 x 和 y 的变化范圍.
3. 用任一点做中心,任意長做半徑,可以画圓弧. (已知圓心 P 和半徑 r, 可以作一圓或弧.)	3. 已知一个实数組 a、b 和一个常数 r, 可以得到一个二元二次方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 或 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. ($D=-2a$, $E=-2b$, $F=a^2+b^2-r^2$.)

現在,原来是几何上的圖形——直線和圓,却換了一个面目,变成了代数上的方程——二元一次方程和二元二次方程了. 研究二元一次方程和二元二次方程,就有可能明确地回答我們,直尺和圓規的作圖本領究竟有多大.

八 問題的关鍵

只有由已知的長度用有限多次有理运算和开平方所得到的長度,才能用直尺和圓規作出.

几何里的作圖題,你大概也練習过很多了,如作三角形、四边形、切圓等. 在解这些問題的过程当中,你可以看出,無論作什么样的圖,我們总是要定出几个点,然后利用这些点作出所要作的圖形. 如作三角形要定出三个頂点,作四边形要定出四个頂点,作切圓要定出圓心和切点,或者就最基本的作直線或圓来說,也要定出兩点(对於圓来說,就是半徑的兩

个端点). 因此,我們可以这样理解. 几何作圖里的主要关鍵,就是要定出所求圖形里的一些点的位置. 那末我們是怎样作出这些点来的呢? 当然只有用直尺和圓規. 用直尺和圓規又怎样来确定点呢? 我們說有三种情况: 用直尺作兩条直線得出交点来; 用直尺作直線、用圓規作圓得出交点来; 用圓規作兩个圓得出交点来. 在后兩种情况, 往往不作出整个的圓而是一段弧,因为目的既然在於确定点的位置,只要作出这个圓跟直線或另一个圓(弧)相交的部分就够了.

为了更清楚地說明这一点,我們可以举几个具体的作圖題例子. 例如已知一个三角形的兩角一夾边,求作这个三角形:我們先作好已知边,再在边的兩端分別作已知角,这样就把这个問題解出了. 其实在这里我們是在利用已知角的兩边相交求出这个三角形的第三个頂点. 再如已知一个矩形的一边和一条对角線,求作这个矩形:我們先作好已知边,在边的一端作一条垂線,再用边的另一端做圓心,用对角線長做半徑作弧,弧和那条垂線相交的点,就是矩形的第三个頂点. 这里是应用直線和圓弧相交求出来的. 有了三个頂点,就可以作另外兩条边完成这个矩形. 这里是在应用兩条直線相交求出第四个頂点. 再如最簡單的一个作圖題,求作一線段的垂直平分線:这里就是应用在線段兩端作圓弧的方法,求出兩弧的兩个交点,通过这兩个交点作直線,就是所求的垂直平分線.

其实不限於这些例題,不管什么作圖題,假如你把它的作法仔細分析,实际上都是这样的.

特別是有一种叫做"軌跡交截法"的作圖法,在这种方法

里可以更清楚地看到我們所說的情况：作圖的关鍵实际上是在求交点．所以在这里我們假如复習一下这个方法的原理，倒是很有意思的．所謂軌跡交截法，就是：

如果所提出的作圖題的解决可以归結到决定适合於若干已知条件的某一点的位置，那末，我們可以先放棄这些条件当中的一个，这样就有無数的点可以适合於其余的已知条件，这些点便形成一个軌跡．如果可能的話，我們就可以作出这个軌跡来．

其次，把我們所放棄的条件加进来而放棄另一个已知的条件，再来考慮，这时候仍然会有無数的点可以适合於現在的已知条件，这些点又形成一个軌跡．如果可能的話，我們又可以作出这个軌跡来．

因为所求的点必須适合於題里已知的一切条件，所以它一定同时在这兩个軌跡上，也就必定是这兩个軌跡的交点．

有时候兩个軌跡当中的一个是題里已經給出的，那我們只要作一个軌跡就可以了．

在初等几何里所研究的軌跡，只是直線、線段、圓、弧，这些軌跡不都是直尺和圓規能作出的嗎？因此，我們可以說初等几何里解一切的作圖題，都是在用軌跡交截法．只是除了我們特別提出說是用軌跡交截法的一些作圖題以外，其余的虽然也在用軌跡交截法，看起来却不十分明显罢了．

那末軌跡交截法在代数学里相对应的是什么呢？那就是求联立方程組的解．

我們已經知道利用直尺和圓規确定点的位置，可以有三

种情形:第一种是兩条直線的交点,第二种是一条直線跟一个圓的交点,第三种是兩个圓的交点. 譯成代数学的話,根据圖形和方程的对应关系,便是求三个联立方程組的解:

第一种情况:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0.$$

第二种情况:

$$Ax+By+C=0,$$
$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

第三种情况:

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$
$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

显然,代数里解这些联立方程組的工作相当於几何里軌跡交截法求交点的工作.

至於怎样来求出这些联立方程組的解,我想你一定很熟練. 第一个联立方程組的兩个根是 $x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}$, $y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}$; 解第二个联立方程組,可以把二元一次方程写成一个变数是另一个变数的函数式,如 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, 把它代入二次方程里,得出只含有一个未知数的二次方程,設是 $ax^2+bx+c=0$,然后应用 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,算出 x 的値,再由它求出 y 的値. 第三个联立方程組里,我們看出把兩个二元二次方程相減,就得出一个二元一次方程,把这个二元一次方程跟一个二元二次方程联立,解法就跟第二种情况一样.

仔細观察上面三个联立方程組所求出的根，便知道第一組方程的根可以由方程各項系数用加減乘除的运算得出，第二第三兩組联立方程的根可以由方程各項的系数用加減乘除和开平方的运算得出．同时，在上面的三个联立方程組里，所有系数A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2、A、B、C、D、E、F、D_1、E_1、F_1、D_2、E_2、F_2等，依照我們前面所討論的把几何里直線和圓譯成代数方程的道理，又知道它們完全可以由已知点P_1、P_2、P、Q……的坐标(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(a, b)……等用加減乘除的运算得出的，由此，所有这些由直線和圓弧相交所得出的新的点的坐标（就是联立方程組的根），都可以由已知点的坐标用加減乘除和开平方的运算得出．於是我們得到下面重要的結論：

由已知点經过欧氏几何的作圖法所能得到的新的点的坐标，都可以由已知点的坐标用有限多次的加減乘除和开平方的运算得出来，反过来，如果一点的坐标不能由已知点的坐标用有限多次的加減乘除和开平方的运算得出，便不能由已知点用欧氏作圖法作出．

一点的坐标其实是兩个長度，所以又可以这样說：由已知的長度經过欧氏几何的作圖法所能得到的新長度都可以由已知的長度用有限多次的加減乘除和开平方的运算得出，反过来，如果一个長度不能由已知的長度用有限多次的加減乘除和开平方的运算得出，便不能由已知的長度用欧氏几何作圖法作出．

上面的結論，就說明了直尺和圓規作圖的本領究竟有多大．

九 完全是兩回事

作圖問題的"無解"和"不可能"的区别.

你說代数課里听老师講过，二元一次联立方程組的解在几何上的說明是这样的：如果联立方程組里各系数有 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ 的关系，那末这兩条直線就平行，沒有交点，也就是說，找不到它們的公根，这种方程叫矛盾方程；如果 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$，那末这兩条直線重合成一条，也就是說，可以找到無数組适合它們的公根，这种方程叫相依方程．於是你問我："用代数来分析几何作圖的时候，遇到了像第一种情形的話，是不是就不可能作圖了呢？"

这一点你提得眞有意思，也正是我准备要談的，用直尺和圓規来求出所要作的圖形上的一些新的点，有时候不像我們所想的那样如意．兩条直線在平面上有相交、平行、重合三种情况，直線跟圓也有相交、相切、相离三种情况，圓跟圓有相交、相切、相离、重合四种情况．这些情况，我們都可以从联立方程組里的系数关系上判別出来，关於兩条直線的位置关系，就像你所說的，而直線跟圓、圓跟圓的位置关系，也可以由最后所得出的 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 式里的判別式 b^2-4ac 看出来．

我們可以把它們的对应关系作成表解：

几　何　学	代　数　学
兩直線的位置关系：1. 相交(一公共点)，2. 平行(無公共点)，3. 重合(無数公共点).	在 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ 里：1. $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$(一解)，2. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$(無解)，3. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$(無数解).
一直線跟一圓的位置关系：1. 相交(兩公共点)，2. 相切(一公共点)，3. 相离(無公共点).	在 $\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \end{cases}$ 里：1. $b^2-4ac>0$(兩解)，2. $b^2-4ac=0$(兩解相同)，3. $b^2-4ac<0$(無解)*.
兩圓的位置关系：1. 相交(兩公共点)，2. 相切(一公共点)，3. 相离(無公共点)，4. 重合(無数公共点).	在 $\begin{cases} x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, \\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \end{cases}$ 里：1. $b^2-4ac>0$(兩解)，2. $b^2-4ac=0$(兩解相同)，3. $b^2-4ac<0$(無解)，4. $\frac{D_1}{D_2}=\frac{E_1}{E_2}=\frac{F_1}{F_2}=1$(無数組解).

* $b^2-4ac<0$，得出的是虚根，在实数坐标系上沒有意义.

剛才你問我,假如在作圖的过程当中,遇到了兩条直線不能相交得出新的点的时候,是不是就不可能作圖了,現在看来,除了兩条直線不能相交的情况之外,还有直線跟圓和圓跟圓的不相交.但是我应該着重指出一点,就是你所說的"不可能"三个字用在这里是錯誤的.为什么会有得不出交点的情形呢?根据上面的表解,知道全是由於系数的关系,系数又是从哪里来的呢?前面談过,它們是由已知条件的長度得来的,因此,由已知条件長度給出的不同,有时候可以很順利地作出圖形,有时候就無法作出这个圖形,有时候还可以作出無数个圖形,这些都不过是作圖当中的一些特殊情形,但是作圖本身一般說来,还是可能的.在我們几何作圖上,有时候因了所設条件的情形特殊,解答的个数可以多到無数,我們叫它做"不定解";也可以沒有解答,我們叫它做"無解";也可以有一个或几个解答,我們叫它做"有解".这些都是作圖可能問題当中的各种情况.对於一个作圖問題的这些情况,我們通常要在作出圖以后,加以討論,像作圖題無解的情形是常会遇到的.

至於作圖"不可能"問題,跟"無解"却完全是兩回事.所謂作圖不可能問題,只是指用直尺和圓規不能把这个圖作出来,如果用旁的办法,那我們还是可以作出这个圖来的.所以这个作圖題的解答实际上是存在的,不像無解的作圖題,它的解答是不存在的.譬如过圓內一点作圓的切線便是無解的作圖題.除此以外,我們也可能遇到一些作圖題,它給出的条件不足,因此解答可以多到無数,譬如已知兩边,作一三角形;反轉来,作圖題給出的条件太多,事实上無法办到,譬如过已知線

外一点，求作这線的垂直平分線，这种問題本身就是“不合理”的，所以它又决不能同作圖題的“無解”和“不可能”混为一談.

一〇 怎样来动手作?

代数式的几何作圖法.

既然我們已經得出了結論：只有由已知的長度用有限多次加減乘除和开平方的运算所得到的長度，才能用直尺和圓規作圖，那末究竟怎样来动手作呢? 这是一个非常現实的問題. 几何問題通过代数的分析，只是使我們了解問題的性質，具体的实踐当然还要几何本身来解决.

現在我們就从某些簡單式子所表示的線段的作圖談起.

如果 a、b、c……都是已知線段，那末下面的式子所表示的未知線段 x 都可以用直尺和圓規作出来.

(1) $x=a+b+c$,

(2) $x=a-b(a>b)$,

(3) $x=2a$, $5a$,……

(4) $x=\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{2a}{5}$……

(5) $x=\frac{ab}{c}$ (这表示 x 是 c、a、b 的第四比例項，因此，線段 x 可以用作 c、a、b 的第四比例項的方法求得),

(6) $x=\sqrt{ab}$ (这表示 x 是 a 和 b 的比例中項，因此，線段 x 可以用作 a 和 b 的比例中項的方法求得).

(7) $x=\sqrt{a^2+b^2}$ (这表示 x 等於直角边是 a 和 b 的直角三角形的斜边),

(8) $x=\sqrt{a^2-b^2}$ ($a>b$) (这表示 x 等於斜边是 a、一条直角边是 b 的直角三角形的另一条直角边).

上面的一些方法，也体現了用直尺和圓規可以作出由已知長度用加減乘除和开平方的运算所得出的新的長度这一个定理.应用这些方法,我們还可以解一些比較复杂的求作線段的問題.

例如,已知 a、b、c、d、m、n、p，求作 $x=\dfrac{abcd}{mnp}$.

这問題虽然就它們的分子分母分別来看，是沒有几何意义的,而对於全体来說,还是可以作的.

先写成 $x=\dfrac{ab}{m}\cdot\dfrac{c}{n}\cdot\dfrac{d}{p}$ 的形式，再設 $y=\dfrac{ab}{m}$，$z=\dfrac{yc}{n}$，

所以 $$x=\frac{zd}{p}.$$

未知数 y 是 m、a、b 的第四比例項，z 是 n、y、c 的第四比例項，x 又是 p、z、d 的第四比例項. 为了簡化作圖手續，我們还可以把它連續作出:

如圖 13，任意作兩条直線 Ox、Oy，使它們相交成适当的角，从交点 O 起，在这兩条直線上选取: $OA=a$，$OB=b$，$OM=m$，$OC=c$，$ON=n$，$OD=d$，$OP=p$，再連接 MB、NC、PD，

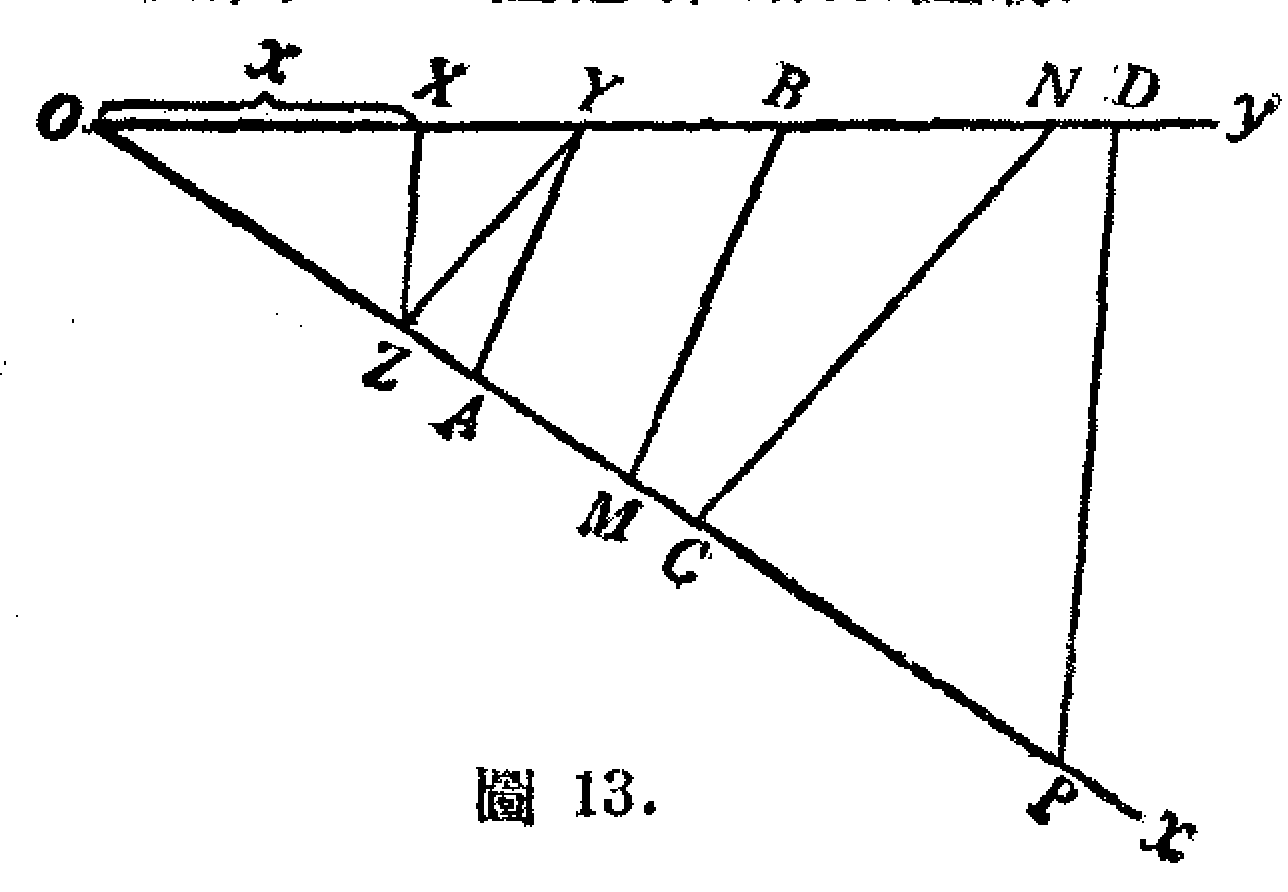


圖 13.

从 A 作 MB 的平行線 AY，从 Y 作 NC 的平行線 YZ，再从 Z 作 PD 的平行線 ZX，那末 OX 就是所求的線段了。

因为，根据平行線間的比例关系，我們有，

$$\frac{OM}{OA}=\frac{OB}{OY}, \text{ 或 } \frac{m}{a}=\frac{b}{y}, \text{所以 } y=\frac{ab}{m};$$

$$\frac{ON}{OY}=\frac{OC}{OZ}, \text{ 或 } \frac{n}{y}=\frac{c}{z}, \text{所以 } z=\frac{yc}{n};$$

$$\frac{OP}{OZ}=\frac{OD}{OX}, \text{ 或 } \frac{p}{z}=\frac{d}{x}, \text{所以 } x=\frac{zd}{p}.$$

又如，已知 a、b、c，求作 $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$.

我們可以設 $a^2+b^2=y^2$，这时候 y 就等於直角边是 a 和 b 的直角三角形的斜边，因此 y 可以作出．作出 y 以后，就得 $x=\sqrt{y^2-c^2}$，因而，x 就等於斜边是 y、一条直角边是 c 的直角三角形的另一条直角边．

进一步我們可以举一些例，說明怎样从具体的作圖問題列出代数式来作圖．我想先提一提所謂“黃金分割法”的問題，就是把已知線段分做兩部分，使一部分是全線段和另一部分的比例中項．这个古老的作圖題你一定很熟悉，因为它有許多有趣的性質吸引着你．不过我在这里不准备多談，只是向你建議，再把这个作圖題复習一下是有好处的，但是应該着重理解它的分析过程和作圖依据，这样，你对怎样用代数的分析来解决具体的作圖題这一点，或許能有更大的体会．

現在，我想另外提出一个問題，怎样用几何作圖法来画出五角星．你一定会很快地这样回答：

“还是应用黄金分割法作出、因为圓内接正十边形的一边等於把圓的半徑分成中外比而得到的比較大的部分，这样我們可以先把圓十等分，再順次連結每隔一个的分点，就得到圓內接正五边形．作出这正五边形的所有对角線，这些对角線所組成的圖形就是五角星．”

假如我进一步再問：能不能直接分圓成五等分呢？这个問題或許对你来說是生疏的，但是借助於代数，还是可以很順利地解决的．

为了演算簡便起見，設已知圓的半徑 $r=1$（就是單位圓），我們先用代数方法求出它的內接正五边形的一边的長．

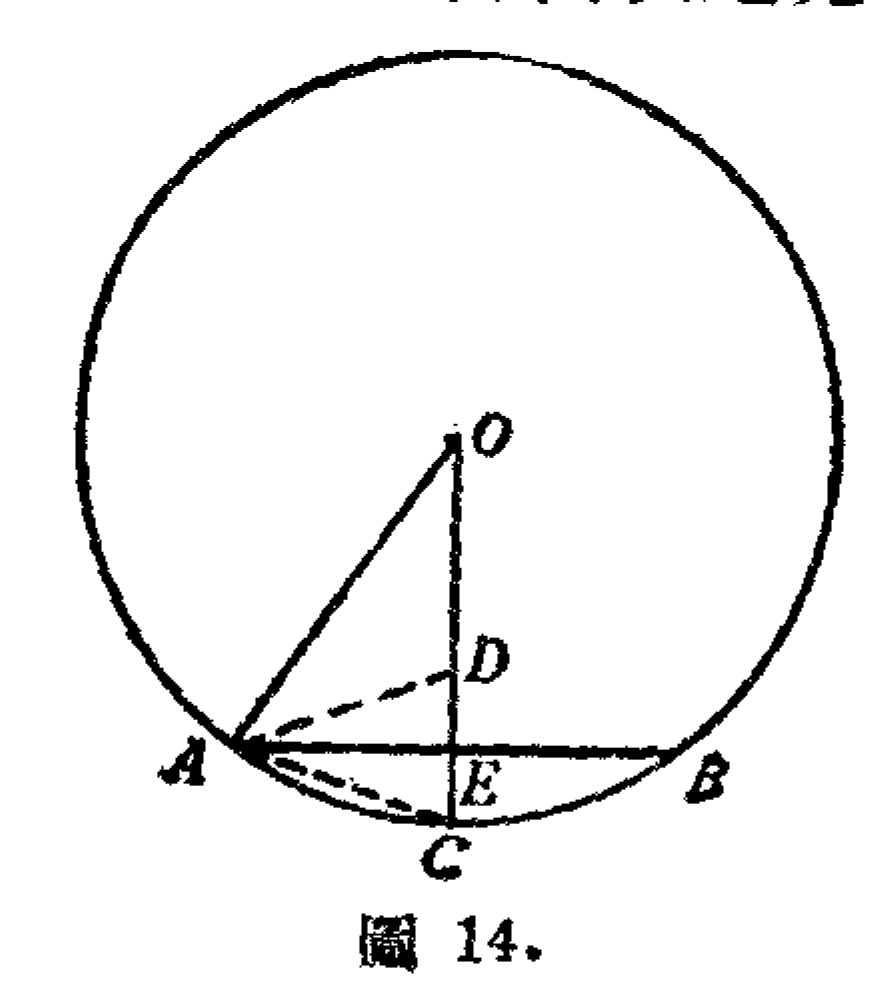


圖 14.

如圖 14，設 AB 是圓 O 的內接正五边形的一边（用 a_5 表示），C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，那末 AC 是內接正十边形的一边（用 a_{10} 表示）．作 $\angle OAC$ 的平分線，交半徑 OC 於 D．

因为
$$\angle O=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ,$$

$$\angle OAC=\angle OCA=\frac{1}{2}(180^\circ-36^\circ)=72^\circ,$$

所以
$$\angle OAD=\frac{\angle OAC}{2}=\frac{72^\circ}{2}=36^\circ,$$

$$\angle ADC=\angle O+\angle OAD=72^\circ,$$

因此
$$\angle O=\angle OAD,\ \angle OCA=\angle ADC,$$

所以
$$OD=AD=AC.$$

又因
$$\triangle OAC\sim\triangle ACD,$$

所以 $$OA:AC=AC:CD.$$

就是 $$1:a_{10}=a_{10}:1-a_{10},$$

那末 $$a_{10}^2+a_{10}-1=0$$

$$a_{10}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5}),$$

取$-\sqrt{5}$不合，所以

$$a_{10}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

又因OC垂直平分AB，$\angle O$是銳角，

所以 $$AC^2=OA^2+OC^2-2\cdot OC\cdot OE.$$

就是 $$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2=2-2\cdot OE,$$

所以 $$OE=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

再由勾股弦定理得:

$$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{1-\left[\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\right]^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

所以 $$a_5=AB=2\cdot AE=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

現在要直接把圓分成五等分，只要把已知圓的半徑当做單位綫段，設法作一綫段等於$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$就得了.

等於$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$的綫段能不能作呢?

它是由有限多次的加減乘除和开平方得出的，因此知道它是可以作出的.

从上面我們举的一些簡單式子所表示的線段的作圖方法可以看出，如果能把这个式子化成 $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ 的形式，就可以利用勾股弦定理来作出.

参照上面得出这个式子的演算，很容易把它化成 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的形式:

$$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}=\sqrt{\frac{4+5-2\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2},$$

而
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}.$$

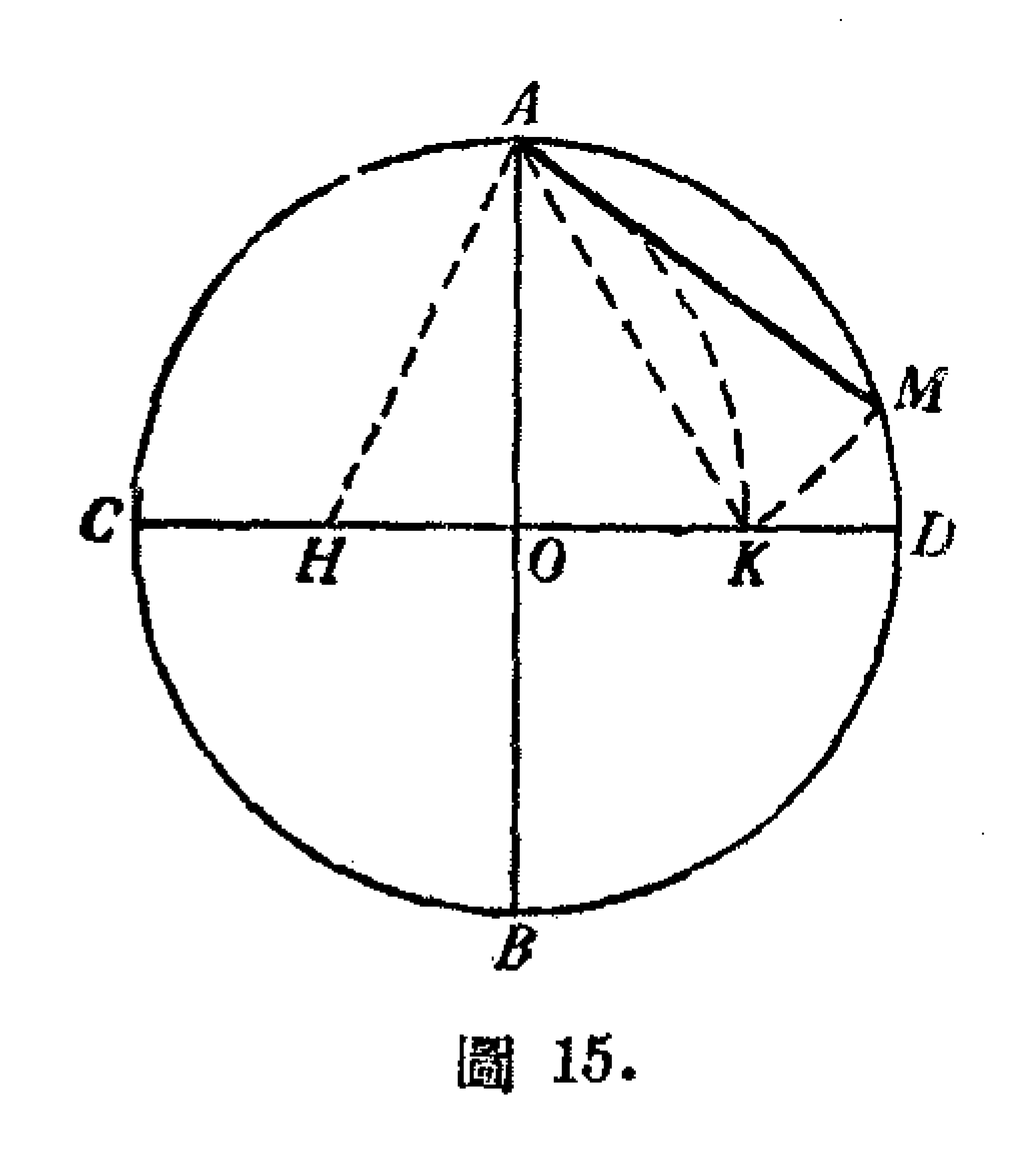


圖 15.

这样問題完全解决了，我們依据分析，可以有下面的作法，如圖 15:

1. 作已知圓(單位圓)的兩垂直直徑 AB 和 CD，相交於圓心 O.

2. 平分 CO 於 H $\left(OH=\frac{1}{2}\right)$.

3. 用 H 做中心，HA 做半徑作弧，交 OD 於 K.

$$\left[HK=HA=\sqrt{AO^2+HO^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2},\right.$$

$$\left.OK=HK-HO=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.\right]$$

4. 用 A 做中心，AK 做半徑作弧，交圓 O 於 M.

5. 那末 AM 就是已知圓里正五边形的一边.

$$\left[\text{因 } AM = AK = \sqrt{AO^2 + OK^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}\right.$$

$$\left. = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.\right]$$

你看,用代数的方法来分析几何作圖,眞是簡單明白!

一一 "不为"和"不能"

限定用直尺和圓規所以不可能三等分一角的道理.

現在,可以来着手解决我們的主要問題了,就是:为什么限定用直尺和圓規不可能三等分一角呢? 要是單憑直尺和圓規来試,是無法判断究竟可能不可能的,只有借助於代数学,才能分析这一个問題.

如圖 16,假如 $\angle AOB$ 是一个任意給出的角,叫它做 α. 为了运算簡便起見,用角頂 O 做中心,單位長度做半徑,画一个弧,分别交角的兩边於 A 和 B,那末 $\overset{\frown}{AB}$ 是在 $\angle AOB$ 的內部,而这个角的兩条三等分射線也必然在角的內部,因此这兩条射線就一定同 $\overset{\frown}{AB}$ 相交得兩点. 於是就可以把問題改变一下,就是在 $\overset{\frown}{AB}$ 上求得它跟三等分角的射線的任一个交点,假如能够求得一个交点的話,問題也就解决了. 我們設想 $\overset{\frown}{AB}$ 上

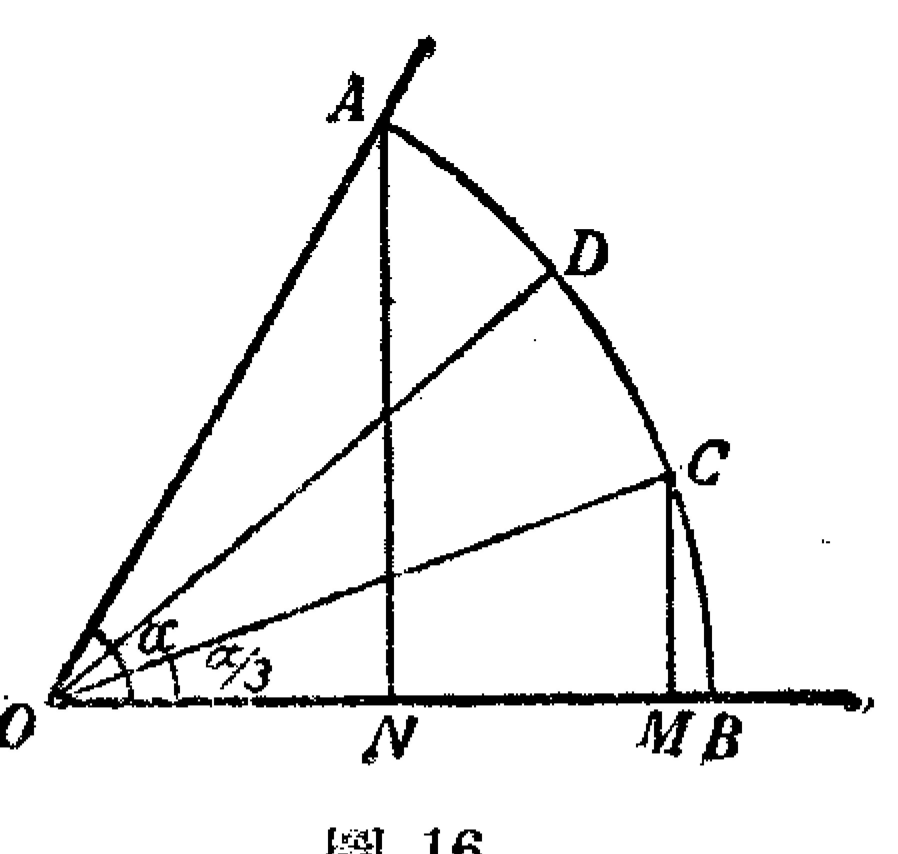


圖 16.

的 C、D 就是所求的点，从 C 和 A 分别作 CM 和 AN 垂直 OB，这样，要是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的 C 点能求得，在 OB 上的 M 点也就一定能求得，反过来說也是一样，要是在 OB 上能求得 M 点，那末 $\overset{\frown}{AB}$ 上的 C 点也可以确定．因此，我們要判断用直尺和圓規是不是能找到 C 点，可以先看看用直尺和圓規是不是能找到 M 点．那末我們怎样来找 M 点呢？看圖上 OB 是已給角的一边，角頂 O 是固定的，假如能在 OB 上求出 OM 的長度是多少，那末 M 点也就确定了．現在問題又可以改变做求 OM 的長度了，这样一来，我們可以根据前面所談的理論来决定 OM 的長度是不是可能作出．我們設 OM 是 x，如果 x 可以用有限多次加減乘除和开平方的运算所構成的代数式来表示，那末我們也可以用直尺和圓規把它作出来，問題也就迎刃而解；若不是这样的話，那末这个作圖就不是直尺和圓規的能力所及，也就是作圖不可能問題．

怎样来用一个代数式表示 OM 的長度呢？我們只要应用一些簡單的三角知識就够了．

如圖 16，因 OA 和 OB 是單位圓的半徑，α 又是定角，A 一定是定点，所以

$$ON=\cos\alpha \text{（这个長度是已知的），}$$

$$x=CM=\cos\frac{\alpha}{3} \text{（这个長度是未知的，也就是所求的）．}$$

我們記得在三角里学到过，$\cos\alpha$ 和 $\cos\frac{\alpha}{3}$ 有这样的关系：

$$\cos\alpha=4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

現在設 $ON=a$，把 ON 和 OM 分別代入这个式子里，得

$$4x^3-3x=a.$$

因此，我們要求得 x 的值（也就是表示它的長度的代数式），就只要解出这个方程的根．

在沒有动手研究这个方程的根以前，可以先注意一点，这里的常数項 $a=\cos\alpha$，是随着所給角 α 的大小而变化的．要一般地解出这样一个三次方程，对我們来說还是有困难的，因此，我們可以先来考虑它的几种特殊情形：

（1）假設 $\alpha=90°$，$\cos\alpha=\cos 90°=0$，就是 $ON=a=0$，方程变成：

$$4x^3-3x=0,\ \text{或}\ x(4x^2-3)=0.$$

这样可以得出三个根：$x=0$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$．舍棄 0 根同負根①，我們知道 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是符合於有限多次加減乘除和开平方运算的規定的，所以是可以作圖的：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

用單位長作直角三角形的斜边，單位長的一半作一条直角边，另一条直角边便是所求的 OM 的長．事实上，余弦函数是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的小於 $90°$ 的正角是 $30°$．

---

① 余弦函数是 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的角是 $150°$，实际上是 $(90°+360°)$ 的三等分角；余弦函数是 0 的角是 $270°$，实际上是 $(90°+720°)$ 的三等分角．

(2) 假設 $\alpha=135^\circ$, $\cos\alpha=\cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,就是 $ON=a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$(a 在坐标上横軸的負向),方程变成:

$$4x^3-3x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 或\ 8x^3-6x+\sqrt{2}=0.$$

解这个方程,可以得出三个根:$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$. 后面兩个根我們暫时不去管它①,只看第一个根 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,它是符合於有限多次加減乘除和开平方运算的規定的,所以是可以作圖的:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

用單位長的一半作一个等腰直角三角形的直角边,斜边便是所求的 OM 的長. 事实上余弦函数是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的小於 90° 的正角是 45°.

(3) 假設 $\alpha=180^\circ$, $\cos\alpha=\cos 180^\circ=-1$, 就是 $ON=a=-1$(a 在坐标上横軸的負向),方程变成:

$$4x^3-3x=-1,\ 或\ 4x^3-3x+1=0.$$

解这个方程可以得出三个根:$x=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -1. 这三个数都是符合於有限多次加減乘除和开平方运算的規定的,所以是可以作圖的.事实上,余弦函数是 $\frac{1}{2}$ 的小於 90° 的正角是 60°;大於 90° 的角是 300°, 这是 $(180^\circ+720^\circ)$ 的三等分角;而

① 余弦函数是 $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 的角是 165°,实际上是 $(135^\circ+360^\circ)$ 的三等分角;余弦函数是 $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 的角是 285°,实际上是 $(135^\circ+720^\circ)$ 的三等分角.

余弦函数是 -1 的角是 180°,这是 $(180^\circ+360^\circ)$ 的三等分角.

其余像 108° 的角,我們也可以应用黄金分割的方法作出 36° 的角,推开来說,所有可以像这样用直尺和圓規作出的角,它們的三倍角都可以用直尺和圓規来三等分.

那末是不是从这里可以推出:任意角都可以用直尺和圓規三等分呢? 当然不能,根据特殊情况来概括一般情况,是会犯很大的錯誤的. 我們知道这个方程里的常数項 a 的范圍是 $-1\leqslant a<1$,上面所举的 0、$-\frac{\sqrt{2}}{2}$、-1 等,畢竟是一些个别的値. 我們要把所有的値一般地进行研究,固然还有困难,但是不妨反过来看一看,是不是有一些角不能用直尺和圓規三等分呢? 假如可以找到的話,那末我們可以这样說:要一般地用直尺和圓規来三等分任意角,就一定是不可能的了.

現在我們就取一个 60° 的角来試一試.

假設 $\alpha=60^\circ$, $\cos\alpha=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, 就是 $ON=a=\frac{1}{2}$,方程变成:

$$4x^3-3x=\frac{1}{2}, \text{ 或 } 8x^3-6x-1=0.$$

現在要解出这个方程的根. 事实上还不必把这个方程的根全部解出来,因为我們的主要目的是研究这个方程的根是不是可以作圖,也就是它有沒有根是由有限多次的加減乘除和开平方等运算符号所構成的式子来表示的. 因此,我們只要研究这个方程是不是有有理根或者只含有开平方符号而沒有开高次方符号的無理根存在,就可以了.

現在分几种情形来考慮.

（1）在方程 $8x^3-6x-1=0$ 里，是不是有有理根呢？这一点，我們完全不必解出这个方程，就可以来判别的．为了簡便起見，假設 $y=2x$，那末方程就变成：

$$y^3-3y-1=0.$$

假如这个改变后的方程有有理根的話，那末原方程也就有有理根，假如这个改变后的方程沒有有理根，原方程也就沒有有理根．

根据代数学的知識，假如 $y^3-3y-1=0$ 有有理根的話，那末这些有理根一定是 -1 的因子，也就是 1 或 -1，現在分別把它們代入方程：$1-3-1\neq 0$，又 $-1+3-1\neq 0$，因此这个方程沒有有理根，也就是說原方程沒有有理根．

（2）在方程 $8x^3-6x-1=0$ 里，是不是有只含有开平方符号而沒有开高次方符号的無理根存在呢？

所謂只含有开平方符号而沒有开高次方符号的無理根，最簡單的形式是 $M\pm\sqrt{N}$，这里 M 和 N 是有理数．我們假定有一根是 $M+\sqrt{N}$，那末用这个根代入这个方程，应該是适合的，就是下式应該成立：

$$\begin{aligned}
&8(M+\sqrt{N})^3-6(M+\sqrt{N})-1\\
&\quad=8(M^3+3M^2\sqrt{N}+3MN+N\sqrt{N})-6M-6\sqrt{N}-1\\
&\quad=8M^3+24M^2\sqrt{N}+24MN+8N\sqrt{N}-6M-6\sqrt{N}-1\\
&\quad=(8M^3+24MN-6M-1)+(24M^2+8N-6)\sqrt{N}=0.
\end{aligned}$$

因为有理数部分跟無理数部分不会相等，所以只有

$$8M^3+24MN-6M-1=0,$$

$$24M^2+8N-6=0.$$

我們再看看跟这个根相共軛的 $M-\sqrt{N}$ 是不是也是这个方程的根，把这个数代入这个方程的左端：

$$8(M-\sqrt{N})^3-6(M-\sqrt{N})-1$$
$$=8(M^3-3M^2\sqrt{N}+3MN-N\sqrt{N})-6M+6\sqrt{N}-1$$
$$=8M^3-24M^2\sqrt{N}+24MN-8N\sqrt{N}-6M+6\sqrt{N}-1$$
$$=(8M^3+24MN-6M-1)-(24M^2+8N-6)\sqrt{N}.$$

由上面得出的关系，可以知道这个式子一定等於0，所以 $M-\sqrt{N}$ 也适合这个方程，就是 $M-\sqrt{N}$ 也是这个方程的一个根．

这就指出了，方程假如有 $M+\sqrt{N}$ 的根存在，那末必有另一个根 $M-\sqrt{N}$ 存在．

另外，在代数学里，我們知道 n 次方程必有 n 个根，所以三次方程也必定有三个根，而且这三个根同方程里各項的系数有一定的关系．现在看看它們的关系是怎样的．

假設有一个三次方程是 $x^3+px^2+qx+r=0$ ①．

我們設它的三个根分别是 α、β、γ，於是得：

$$x^3+px^2+qx+r=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^3+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma.$$

这个式子兩端相应各項的系数应該相等，所以

$$\alpha+\beta+\gamma=-p,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q,\quad \alpha\beta\gamma=-r.$$

根据上面第一个式子，回头来看一下我們前面所討論的方程 $8x^3-6x-1=0$，这里 x^2 項的系数 p 是0．假如方程有

① 假如一个三次方程的 x^3 項系数不等於1，那末各項用 x^3 項的系数除，就可以化成 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的形式．

$M\pm\sqrt{N}$两个根的話，那末$\alpha=M+\sqrt{N}$，$\beta=M-\sqrt{N}$．於是得：

$$(M+\sqrt{N})+(M-\sqrt{N})+\gamma=0\text{，所以}\gamma=-2M.$$

这里M是有理数，可知这个方程要是有$M\pm\sqrt{N}$两个無理根的話，另外一个根一定要是有理根，这显然同前面(1)所得的結論矛盾．就归謬法的道理，知道这个方程是不可能有像$M\pm\sqrt{N}$这种形式的根的．

(3) 除了$M\pm\sqrt{N}$这种形式以外，只含有开平方符号而沒有开高次方符号的無理根是不是还可能有别的形式呢？有，那就是含有双重根式的，标准形式就像$M\pm\sqrt{N}\pm\sqrt{L\pm\sqrt{K}}$，这里$M$、$N$、$L$、$K$是有理数．我們就假定这个方程有一个双重根式的無理根$M+\sqrt{N}+\sqrt{L+\sqrt{K}}$．为了說明方便起見，我們用$A$代$M+\sqrt{N}$，用$B$代$L+\sqrt{K}$，这里$A$、$B$是含一重根式的無理数．那末上面这个双重根式的無理根就可以写成$A+\sqrt{B}$．根据前面(2)所討論的，显然可以推出这个方程一定同时有一个共軛的根$A-\sqrt{B}$，而第三个根应該等於$-2A$．但是A既然是一个含一重根式的無理数，这就跟前面(2)所得的結論矛盾．就归謬法的道理，知道这个方程是不可能有像$M\pm\sqrt{N}\pm\sqrt{L\pm\sqrt{K}}$这种形式的根的．

从(3)的討論可以看出，这个方程也不可能有含三重、四重……根式的根．因为如果有含三重根式的根，一定会推出同时有一个含双重根式的根，这又跟(3)所得的結論矛盾；如果有含四重根式的根，一定会推出同时有一个含三重根式的根，这也是跟已得的結論矛盾的．其余可以依此类推．

於是我們可以得出結論:

方程 $8x^3-6x-1=0$ 的根是不能由有限多次的加減乘除和开平方的运算式子表示出来的，也就是說，用直尺和圓规不能把 60° 的角三等分. 其实，除去了可分的一些特殊角之外，你不选 60° 而选定其他的角，一定会有同样的遭遇.

現在，我們又該小結一下了.

这个古老的、曾經耗費了許多数学家腦力的几何作圖題，从笛卡兒發現了数和形的对应关系以后，总算漸漸地得出結論来了. 人們解決一个問題的时候，往往先从它的正面(可能的一面)着手，但当遇到困难的时候，也就会考虑到它的反面(不可能的一面)，到了人們已經有充分理由可以說明問題是不可能的，那問題也同样算是解决了. 三等分一角問題就是这样的例子，在笛卡兒以前的相当長的时期里，人們認为它是一个难題，現在看来，要用直尺和圓規来三等分一角，不是难而是根本不可能. 因此过去認为是个沒有解决的問題，現在应該說是已經解决的問題，或者說是不成問題的問題.

記得我国古代孟軻所著的書里有这样几句話:"挾泰山以超北海，非不为也，是不能也. 为長者折枝，非不能也，是不为也." 現在，我們对这个問題也可以說是"非不为也，是不能也".

最后，有一点是要指出的，前面我們所論証的，还不是十分严密的，但这並不是說这个問題不能够严密地来論証，只是要严密地来論証，就要用到比較高深的数学知識. 应用比較高深的数学知識，我們可以完全严密地論証上面結論的正确，

不过就从我們上面所作的比較粗淺的論証，也已經可以使我們相信，用直尺和圓規来三等分任意角，是一件根本不可能的事.

一二 跳出了圈子

应用别的曲線来三等分一角. 尼哥米德蚌線. 帕斯卡蜗線.

我在前面說过，除去一些应用特制的工具之外，在数学上还有别的方法来作出一角的三等分線. 这些方法又是怎样的呢？

古代的数学家想用直尺和圓規作出一角的三等分線遭到失敗以后，就很自然地会想到，假如跳出这个圈子，是不是能够解决这个問題呢？也就是說，不限定用直尺和圓規来作直線和圓，而是用另外一些曲線，是不是能把它作出来呢？这方面的工作已經有許多人做过，而且有了不少的成就，当中比較著名的，是在公元前180年左右的大数学家尼哥米德. 他应用了他所發現的非常著名的蚌線，很容易而且順利地解决了三等分角的問題. 蚌線也跟直線和圓一样，是符合於某一特定条件的点的軌跡. 这个軌跡的圖形很像蚌壳的边緣，所以叫它做蚌線，数学上为了紀念这位偉大的發現者，又叫它做尼哥米德蚌線. 大数学家牛頓在研究三次、四次曲線的时候，也曾經应用了这个曲線.

蚌線是这样的一种軌跡：

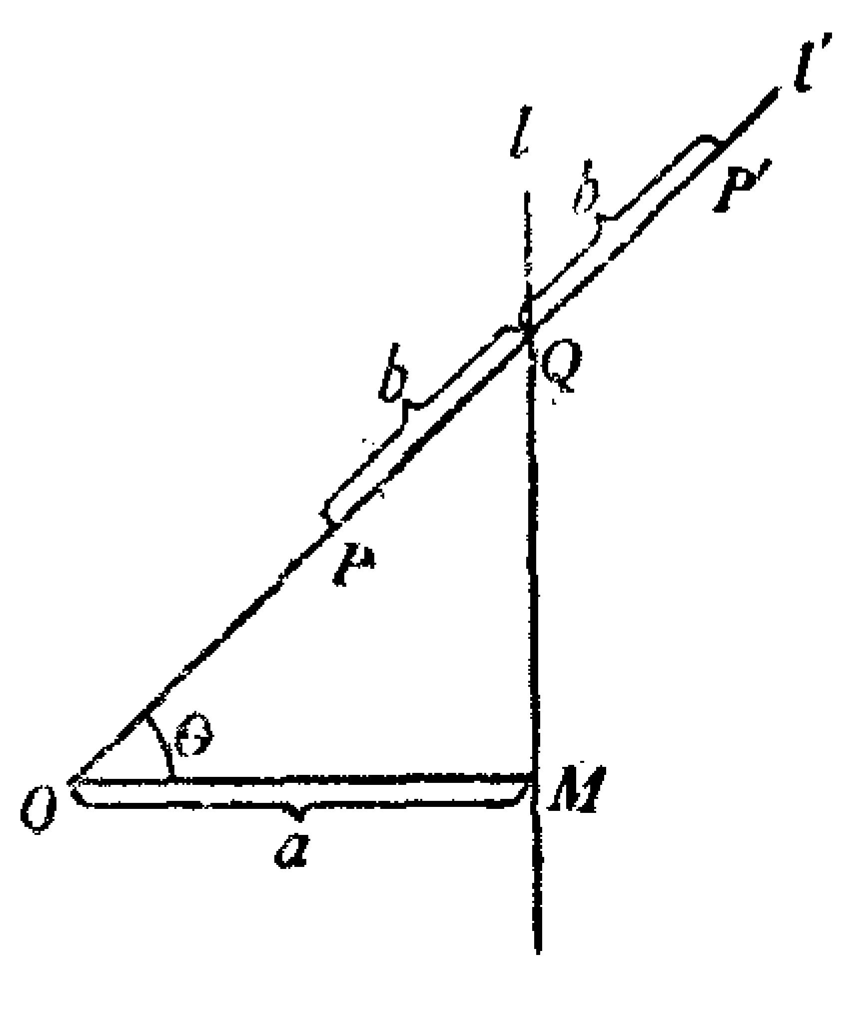


圖 17.

如圖17，有一定点O和一条定直線l，它們的距离OM長是a。經过O点的一条动直線l'遇定直線l於Q，在动直線l'上取兩点P、P'，使PQ和$P'Q$都等於常数b。P、P'的位置隨着动直線l'的位置变动而变动，这兩个动点P、P'的軌跡就是蚌線.

我們很容易把蚌線作出来，並且因了a大於、等於或小於b，可以作出三种蚌線来(圖 18).

利用蚌線的特性，我們可以很順利地来三等分一个任意角.

如圖 19，設$\angle BAC$是所要三等分的角，用角的一边AB做一边，角的另一边AC做一条对角線，作一个矩形$ABCD$. 現在我們認定A做定点，BC做定直線，从A作一条直線

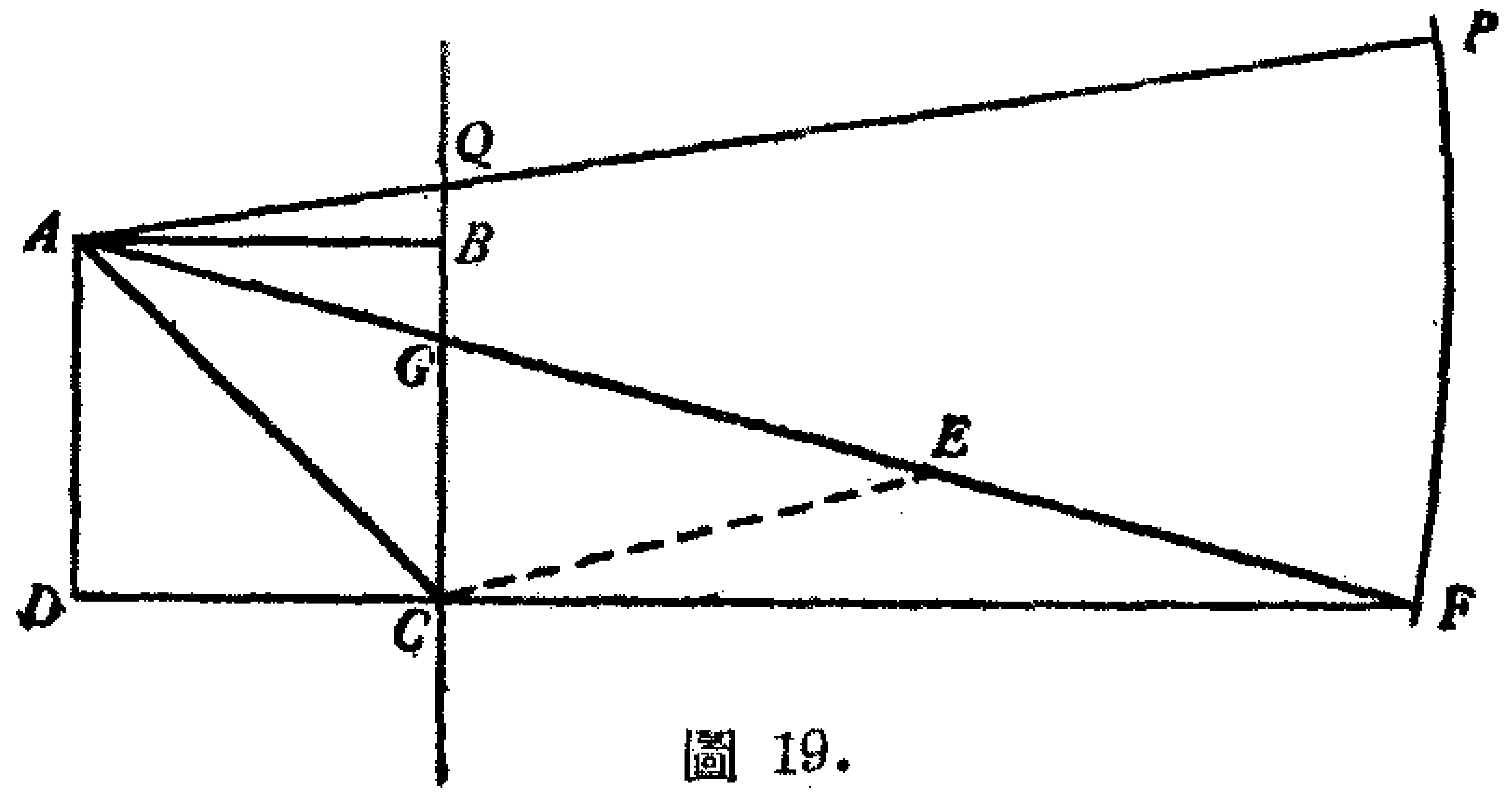
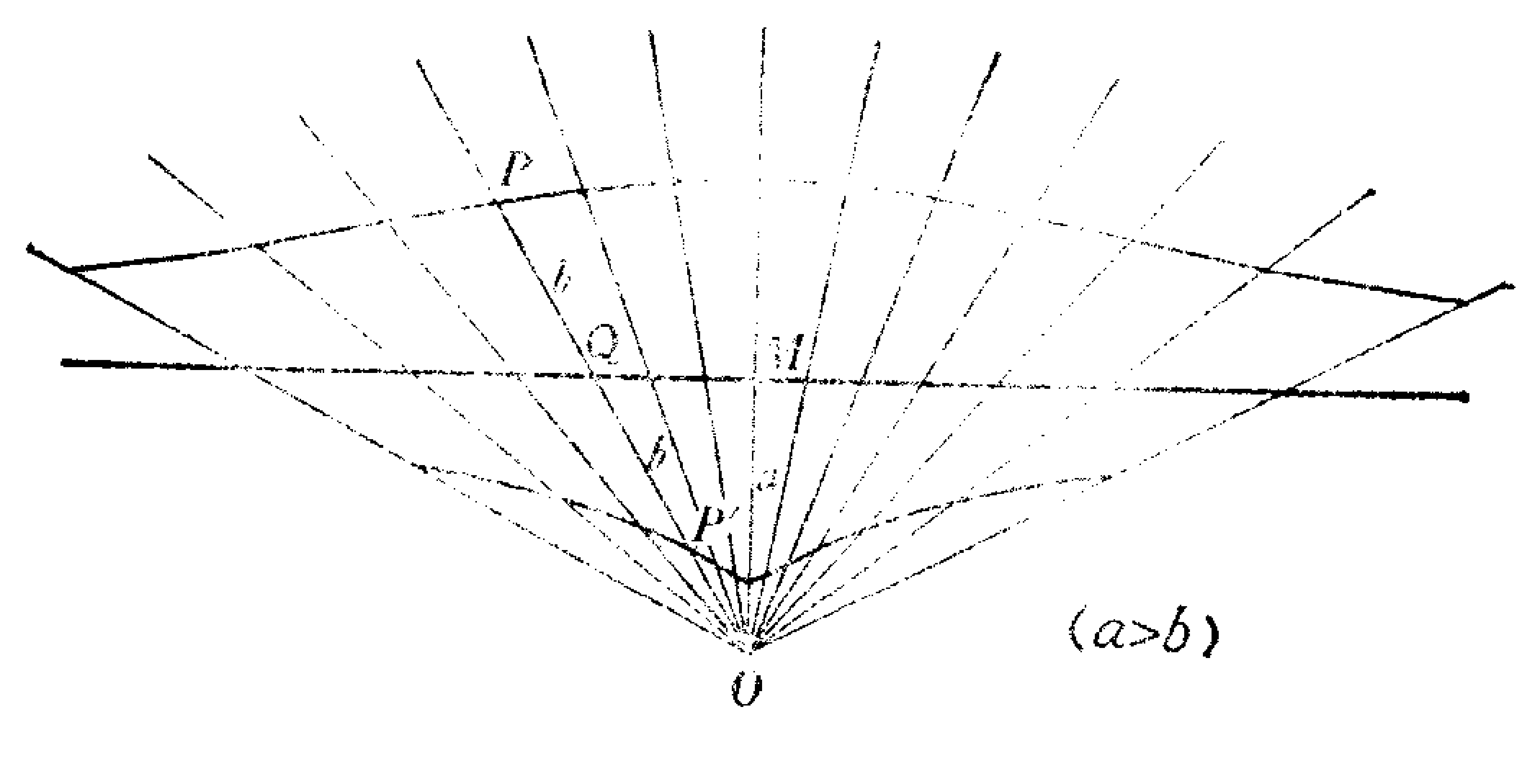
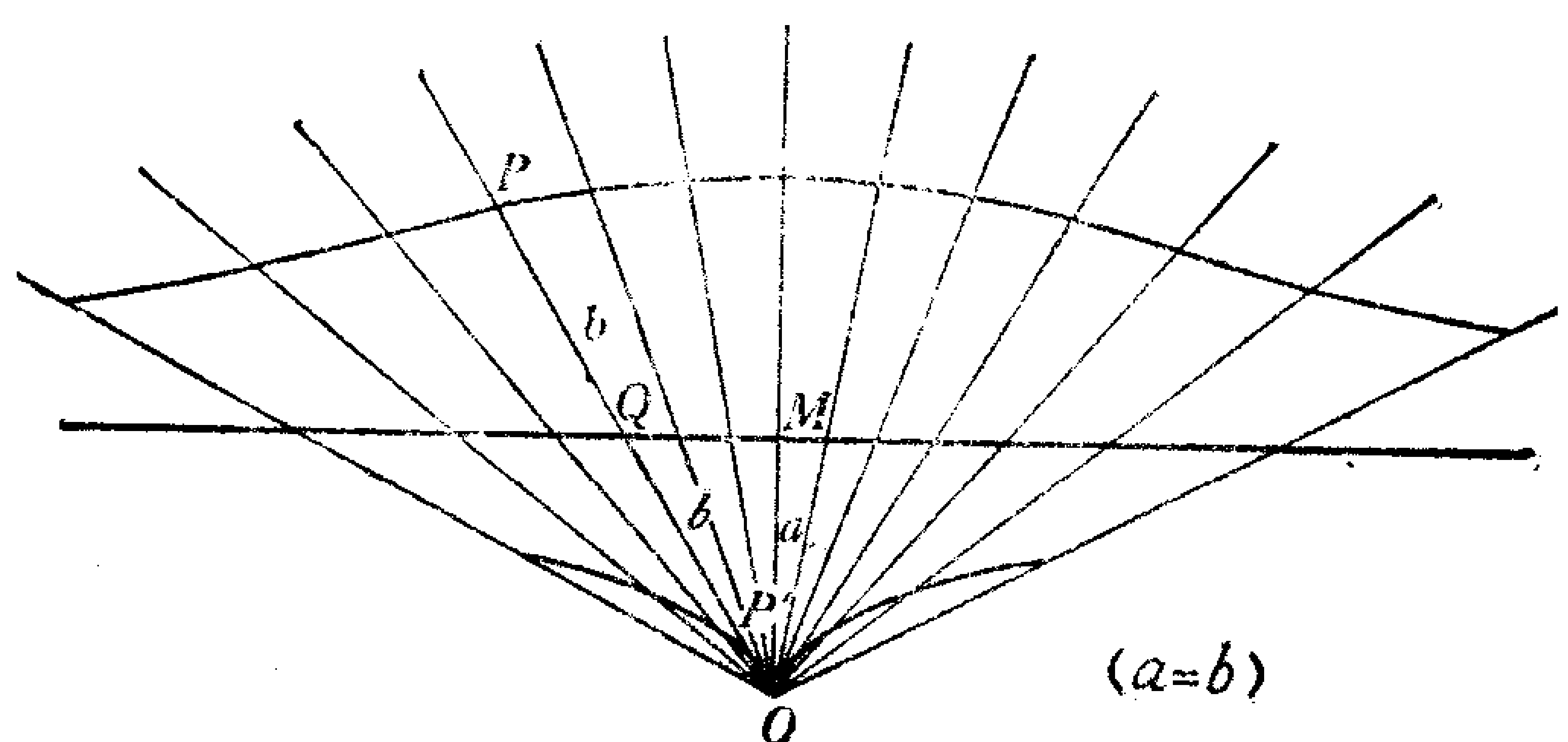


圖 19.

(动直線)交BC於Q，在这条动直線上取一点P，使$PQ=2AC$，那末P的軌跡就是$b>a$的蚌線，不过这里只採用它的右枝.





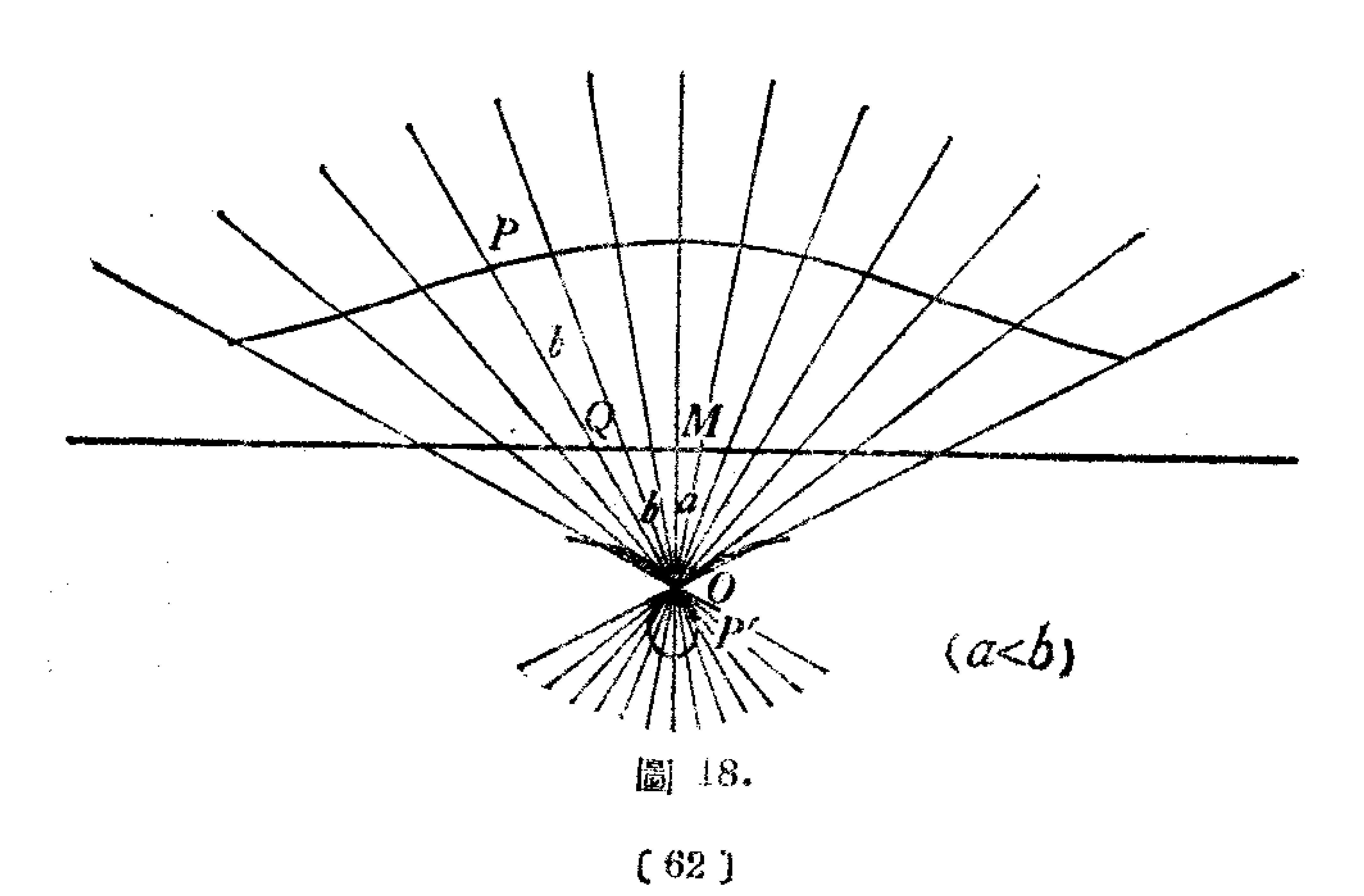


圖 18.

再延長 DC 跟这蚌線相交於 F，連 AF，那末

$$\angle BAF=\frac{1}{3}\angle BAC.$$

这是容易証明的．設 AF 和 BC 的交点是 G，取 GF 的中点 E，連 EC．

因为 $\triangle GCF$ 是直角三角形，所以 $CE=EF$．又根据蚌線的性質，可得

$$EF=AC,$$

所以
$$EF=CE=AC.$$

所以
$$\angle CAE=\angle CEA=\angle ECF+\angle EFC=2\angle EFC.$$

又因为
$$AB\parallel DF,$$

所以
$$\angle EFC=\angle BAF,\quad \angle CAE=2\angle BAF.$$

而
$$\angle BAC=\angle BAF+\angle CAE$$
$$=\angle BAF+2\angle BAF=3\angle BAF,$$

所以
$$\angle BAF=\frac{1}{3}\angle BAC.$$

除了用尼哥米德蚌線以外，也还可以用别的曲線．例如离开今天大約三百多年光景，法国的一位天才数学家帕斯卡發現了蚶線（因为这曲線同蚶壳的形狀很相似），也有人叫它蝸線或心臟線．就在这时候，法国有一位叫洛白福尔的，利用它来解决了三等分一角的問題．

蚶線是这样的一种軌跡：

如圖 20，圓上有一定点 O，从 O 作这个圓的弦 OR，在 OR 和它的延長線上取兩点 P、P'，使 $RP=RP'=a$，a 是一个常

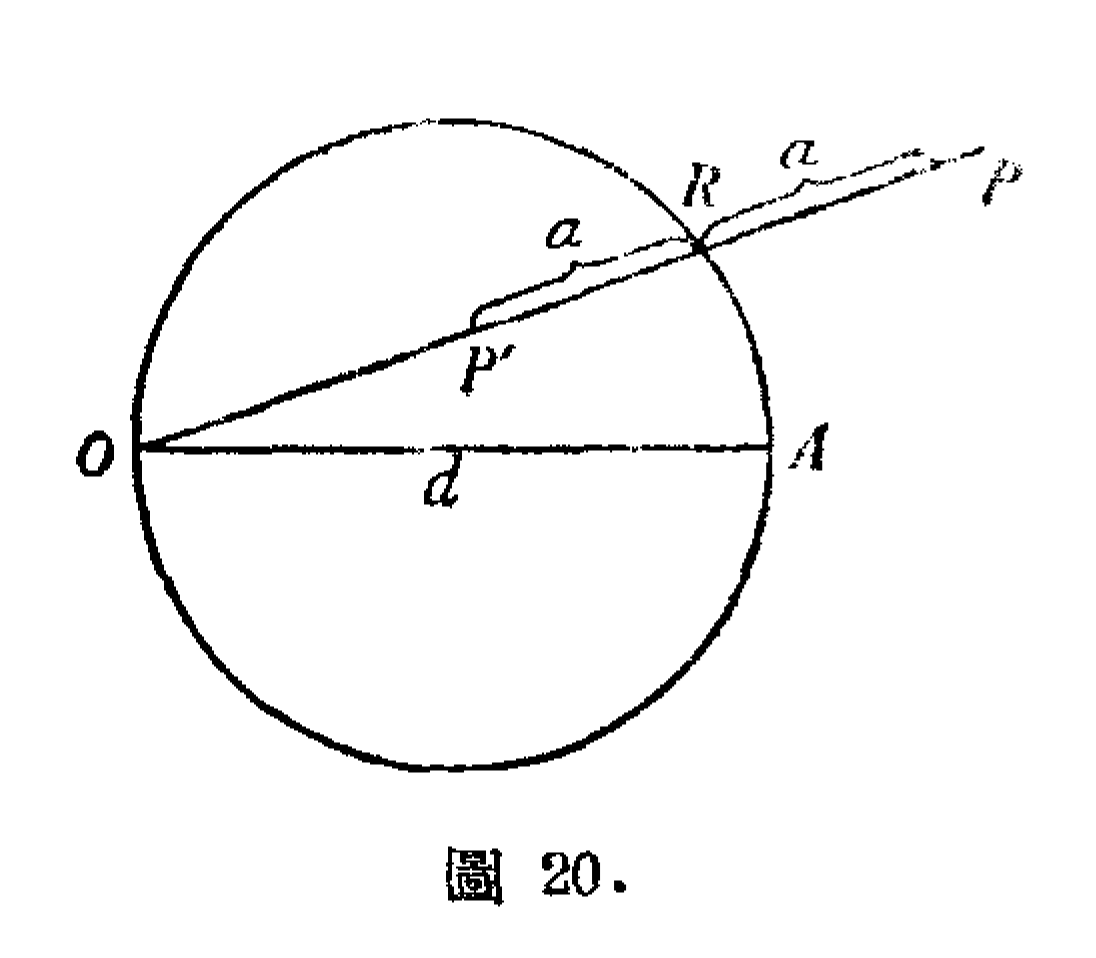


圖 20.

数．当 OR 弦繞着定点 O 旋轉的时候，相应的 R 点在圓周上移动，那末 P、P' 点的軌跡就是蚶線．

同蚌線一样，我們也很容易把蚶線作出来，並且因了 a 大於、等於或小於圓的直徑 d，可以作出三种蚶線来（圖 21）．

利用蚶線的特性，我們也很容易来三等分一个任意角．

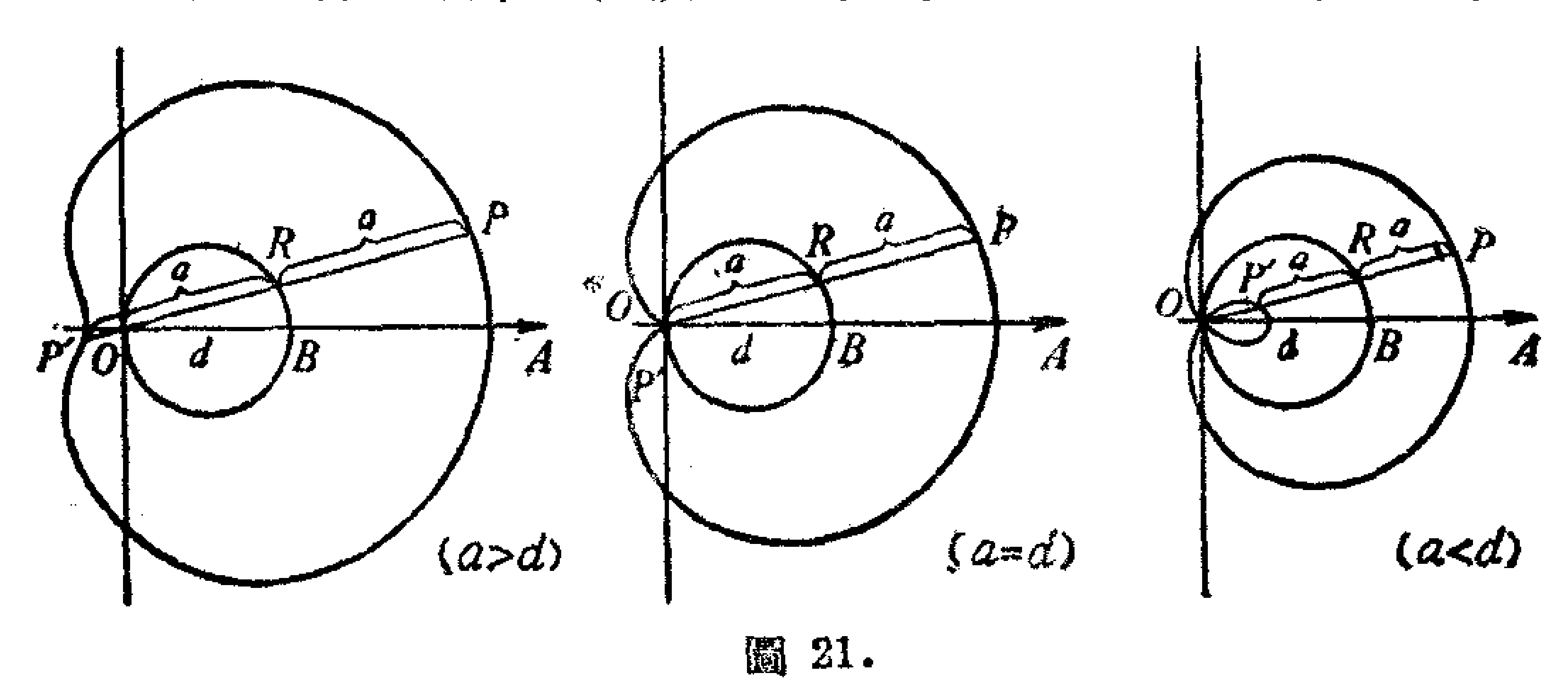


圖 21.

如圖 22，設 $\angle AOB$ 是所要三等分的角，在角的一边上取任意長 OA 做半徑，O 做中心作一圓，並且延長 AO 交圓於 C 点，現在我們認定 C 做定点，CA 做定圓的直徑，作一蚶線，使动弦一端到軌跡上的一点的距离等於定圓直徑的一半（可知这里是 $a<d$ 的蚶

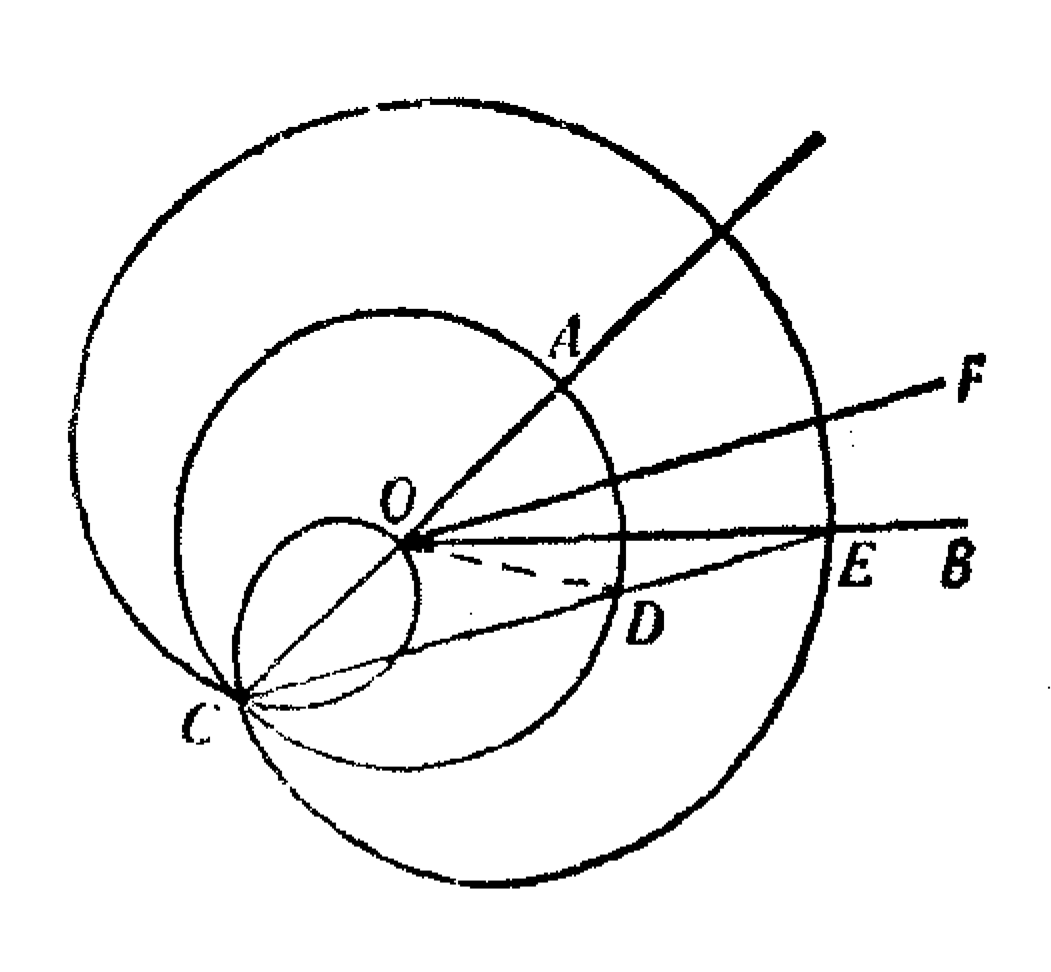


圖 22.

線)，蚌線和角的另一边 OB 相交於 E，連 CE，由 O 作 $OF \parallel CE$，那末

$$\angle FOB = \frac{1}{3}\angle AOB.$$

这可以这样来証明：設 CE 和定圓的交点是 D，連 OD．根据蚌線的性質，可得

$$DE = OD = OC.$$

所以 $\angle OCD = \angle ODC = \angle DOE + \angle DEO = 2\angle DEO.$

而 $\angle AOB = \angle OCD + \angle DEO$

$= 2\angle DEO + \angle DEO = 3\angle DEO.$

又因为 $OF \parallel CE$，所以 $\angle DEO = \angle FOB$，

因此 $\angle FOB = \frac{1}{3}\angle AOB.$

这条曲線能够十分簡便地来解三等分角問題，所以有时候人們也叫它做三等分角曲線．其实，解决这个問題的特殊曲線还有很多，即使是比較熟悉的双曲線也能完成这項任务，但是我們在这里不再一一列举了．

一三 从一个神話談起

倍立方体問題．

現在，我們开始把目标轉向另外一些問題上，这些問題在数学史上同三等分一角問題一样佔有重要的地位．

据說大約在公元前四百多年，古代希臘的雅典流行了伤

寒症，雅典人为了想消除这个災难，便向德里地方的日神（司音乐、詩詞、口才、医藥和美术的神）求助．神說："如果要使病疫不流行，除非把我殿前的立方体香案的体积扩大一倍．" 这个条件使雅典人很兴奋，他們認为这是容易做到的，於是把旧香案的各稜放大一倍，做了一个新的立方体香案，放在神的面前．結果，日神大怒，疫势更加猖獗．於是雅典人再去祈禱日神，方才知道这样做的新香案的体积並不是等於旧香案的兩倍．那末究竟应該怎样做呢？这可把当时的人們难住了，即使是像当时負有盛誉的学者柏拉圖，也認为这是一件非常困难的事．

这就是著名的倍立方体問題，就是已知一立方体，求作另一立方体，使它的体积等於已知立方体的兩倍．由於有上面那样的神話傳說，所以有人也叫这个問題做"德里問題"．

当然，我們上面說的只是一个神話，不过我們却可以从这里看出一点，这个倍立方体問題同三等分一角問題一样，也是一个古老的作圖問題，曾經由古代的一些数学家研究过的．

而且，这也是同三等分一角一样，是一个用直尺和圓規作圖的不可能問題．

把这个問題說得明确一些，就是已知一立方体的稜長是 a，求作另一立方体的稜長 x，使新立方体的体积 x^3 是原来立方体体积 a^3 的兩倍．

要粗淺地証明这是一个作圖不可能問題，倒並不十分困难．为了簡便起見，我們不妨設 $a=1$，也就是已知立方体的稜長是 1 單位，这样，这个立方体的体积便是 $1^3=1$．根据題

意，知道求作的立方体的体积应該是 $2\times1=2$，所以求作立方体的棱長 x 是 $\sqrt[3]{2}$，而要从單位長1用有限次的加減乘除和开平方算出 $\sqrt[3]{2}$，是不可能的，所以倍立方体問題也是不能用直尺和圓規来解决的。

儘管这样，我們却不能說它是用别的方法也無法实現的。它同三等分一角的問題一样，可以用一些工具把它作出；也可以利用一些曲線的特性把它作出；即使用直尺和圓規，我們也可以把它近似地作出来，在实用上是不会帶来什么妨碍的。

現在，我就来說明某一些方法，或許会使你感到兴趣。

用木工常用的角尺兩根，就可以很順利地解决这个問題。为了說明这种方法，我們先証明一个关於对角線互相垂直的直角梯形的定理：

在对角線互相垂直的任何直角梯形里，对角線交点所分成的線段構成几何級数，如圖23，$\frac{a}{y}=\frac{y}{x}=\frac{x}{b}$。

設在直角梯形 $ABCD$ 里，$\angle A$ 同 $\angle B$ 是直角，对角線 DB 跟 AC 互相垂直。於是根据在直角三角形里斜边上的高是兩条直角边在斜边上的射影的比例中項，可以看出，在直角三角形 ABD 里，$\frac{a}{y}=\frac{y}{x}$。同样在直角三角形 ABC 里，$\frac{y}{x}=\frac{x}{b}$。所以 $\frac{a}{y}=\frac{y}{x}=\frac{x}{b}$。

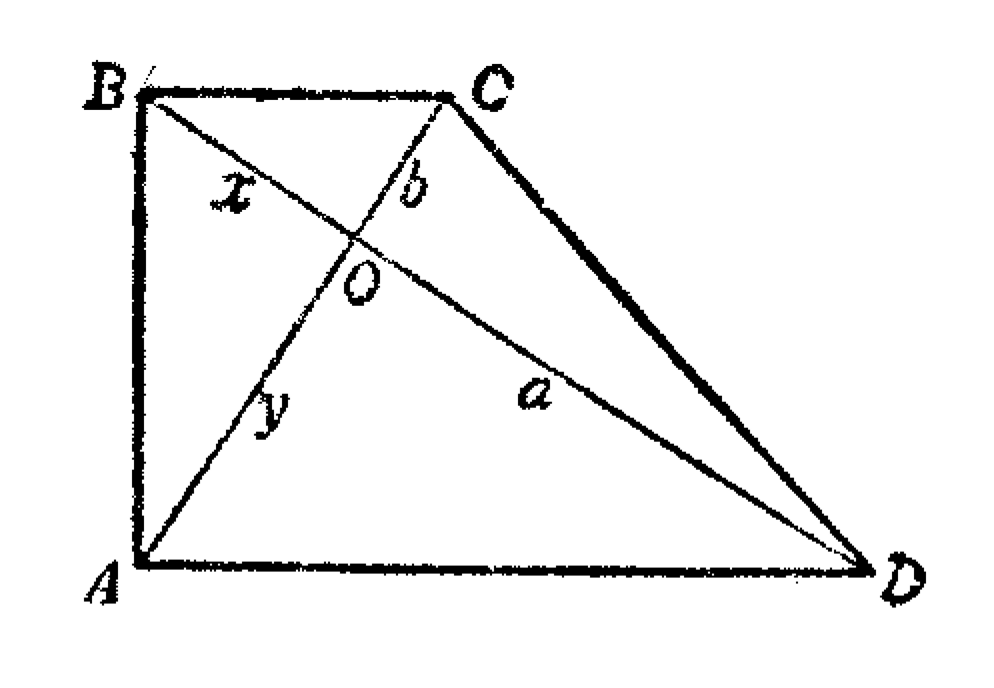


圖 23.

於是得　　　　$y^2=ax$，$x^2=by$。

把这兩个方程联立起来解，可以得到一組根：$x=\sqrt[3]{ab^2}$，

$y=\sqrt[3]{a^2b}$ ①.

現在假定 $a=2, b=1$，我們就得到 $x=\sqrt[3]{2}$。这样不就可以解决这个問題了嗎?

方法是这样的:

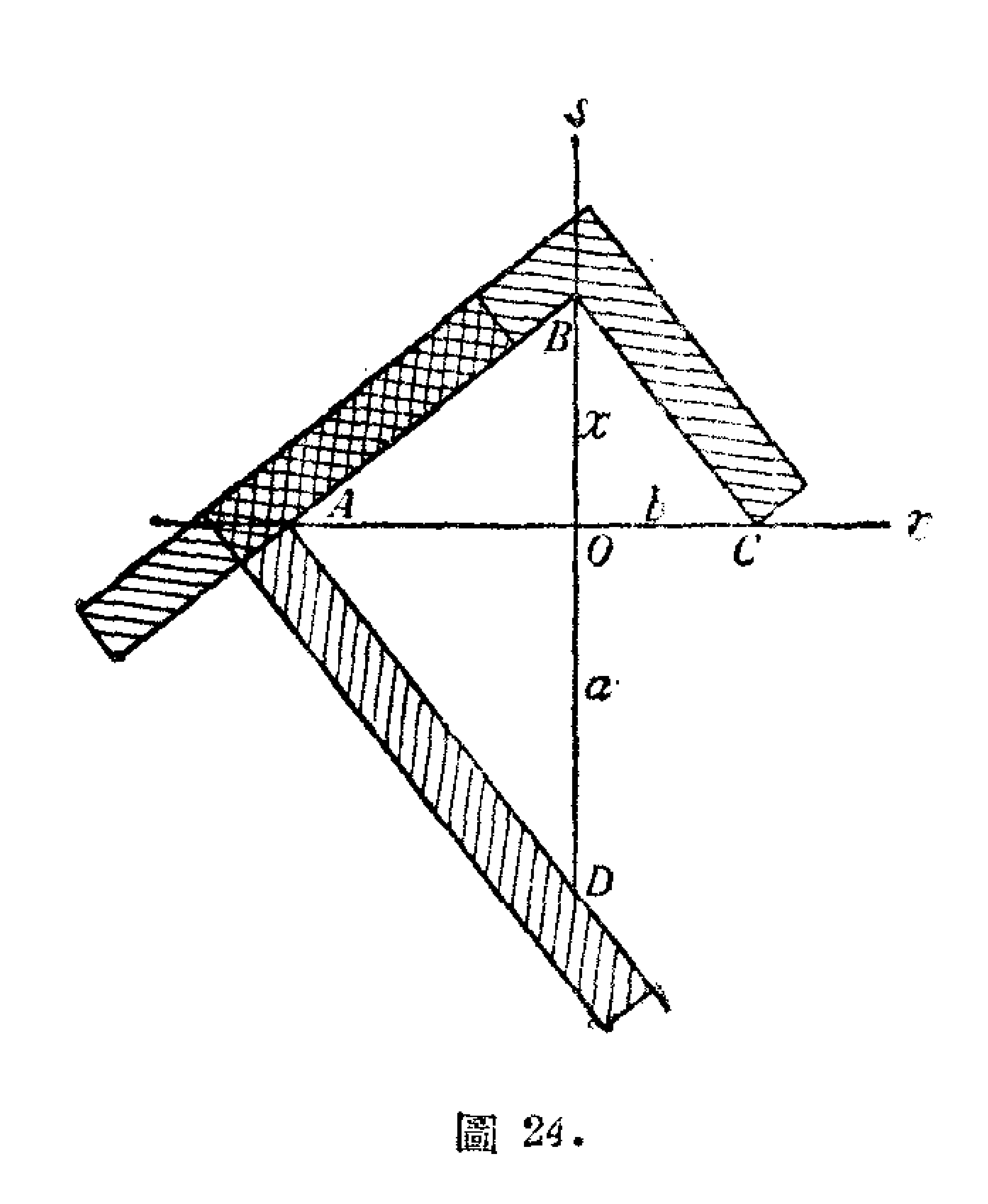


圖 24.

如圖 24，作兩条互相垂直的直線 r 和 s，从它們的交点 O 起在 r 上截取線段 $OC=b=1$，在 s 上截取線段 $OD=a=2$. 現在我們用这兩根角尺相对叠合起来，使兩个直角頂 A、B 分别落在直線 r 和 s 上，而兩条直角边分别通过 D 点和 C 点，現在線段 $OB=x$，就是所求的倍立方体的稜長.

利用这种工具来解决这个問題的方法，在很古的时候就知道了，据說就是柏拉圖首先提出的.

由於这个作法的啓示，柏拉圖的学生，另一位古代希臘著名的几何学家、研究几何圓錐曲線的鼻祖孟尼哥馬首先应用了他所發現的圓錐曲線里的拋物線，巧妙地解出了这个問題.

如圖 25，在笛卡兒坐标上根据方程 $y^2=2x$ 和 $y=x^2$ 描出

① 另一組根 $x=0, y=0$，在这里沒有用処.

兩条抛物線来，於是根据方程組圖解的理論和前面的討論，很容易看出除去原点这一个交点外的另一个交点 A 的横坐标就是所求的線段.

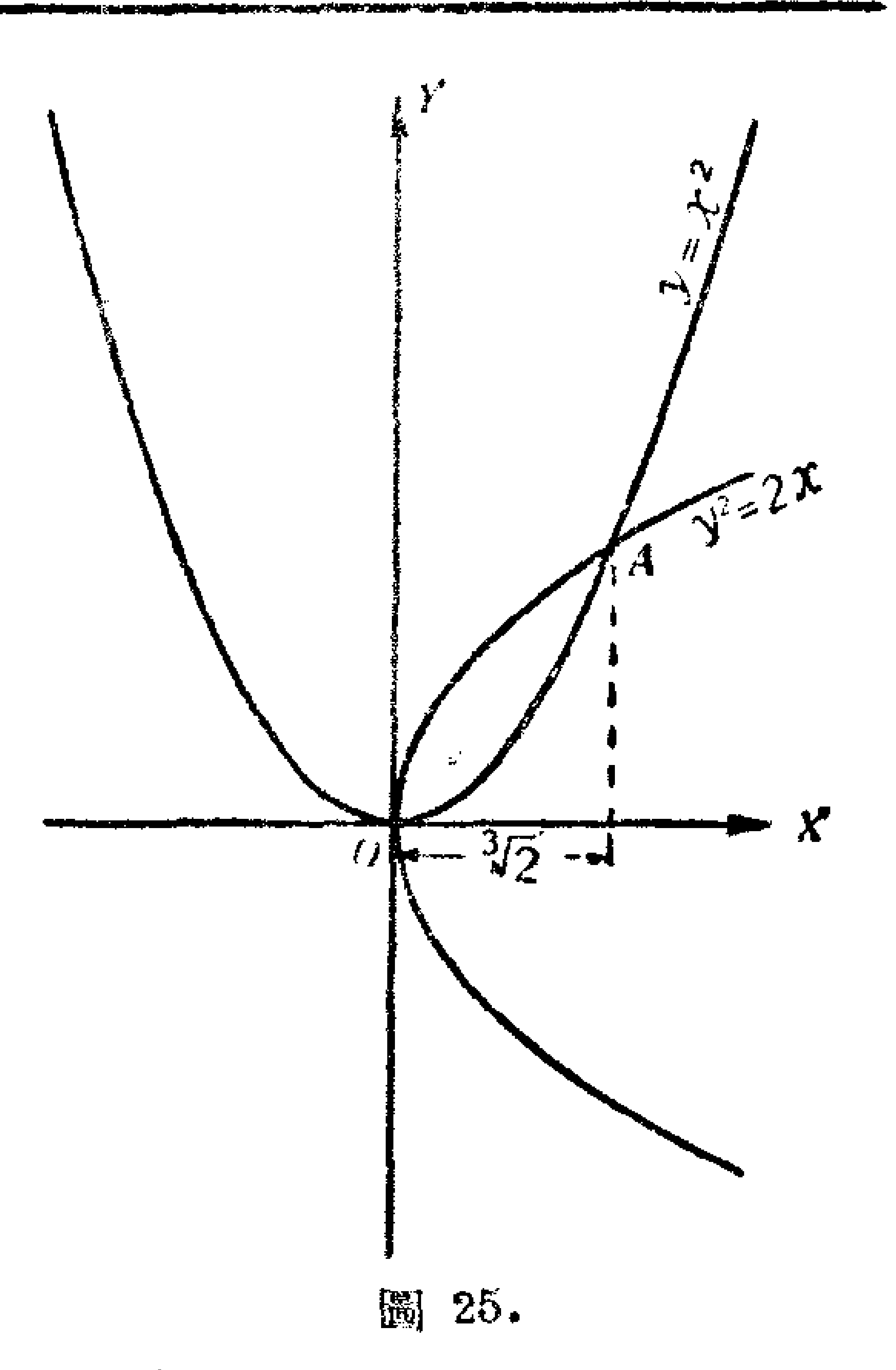


圖 25.

当然，这个問題也跟三等分角問題一样，还可以利用别的一些曲線的特性来解决，譬如公元前大約 200 年，希臘数学家帝屋哥利發現的蔓叶線，有一种著名应用就是解决倍立方体問題．前面談过的尼哥米德蚌線，也可以用来解决这个問題.

現在我想介紹一个关於这个問題的用直尺和圓規的近似作圖法．这种方法是有实用意义的，因为实际应用的时候，並不需要我們絕对严密和精确．卽使有些本来可以严密地加以論証的問題，我們为了簡便起見，也常採用它的近似作法呢!

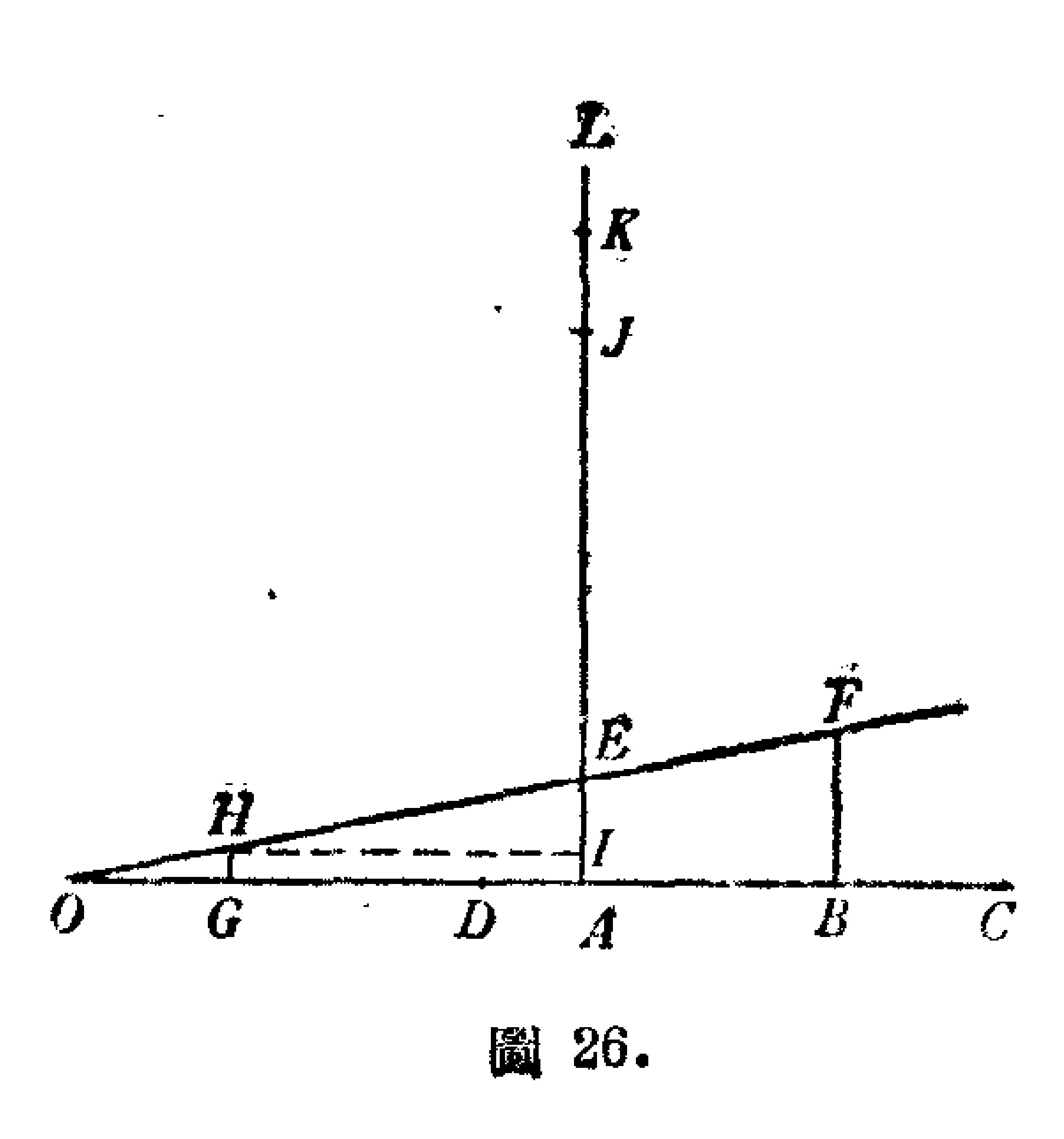


圖 26.

如圖 26，設 OA 是單位長，先把它五等分，設 $DA=\frac{1}{5}OA$．延長 OA 到 C，在 AC 上取 $AB=\frac{1}{2}OA$．在 A 点作

一直線 AL 垂直 OA，取 $AE=DA=\frac{1}{5}OA$，連 OE 線並且把它延長．在 B 点作一直線 BF 垂直 AC，BF 跟 OE 線在 F 点相交．再取 $OG=BF$，又在 G 点作一直線垂直 OA，跟 OE 相交於 H．在 AL 上取 $AI=GH$，$IJ=OA$，$JK=DA$．那末 AK 大約等於 $\sqrt[3]{2}$．

因为 $\frac{OB}{OA}=\frac{3}{2}$，所以 $OB=\frac{3}{2}OA$．又 $\frac{AE}{OA}=\frac{1}{5}$，因而 $OG=BF=OB\cdot\frac{AE}{OA}=\frac{3}{2}OA\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{10}OA$，$GH=OG\cdot\frac{AE}{OA}=\frac{3}{10}OA\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{50}OA$．於是

$$AK=AI+IJ+JK=\left(\frac{3}{50}+1+\frac{1}{5}\right)OA=1.26\cdot OA.$$

AK 的值是單位長的1.26倍，而 $\sqrt[3]{2}$ 的值大約是1.25992，兩者比較，相差很微．倘若有一个立方体的稜長等於地球的直徑的話，要求兩倍这个立方体体积的立方体的稜長，依照前面所說的近似的方法来求，所得的長度跟正确的也不过相差0.05里．

你或許会这样說："这方法也未免太麻煩了！何不干脆就算出 $\sqrt[3]{2}$ 的数值，直接量出它的長度呢？"

你說的真有意思，本来有些問題在实用上可以採用直接量度的方法的，我們不是說过用量角器也可以三等分一角嗎？至於我特別提出这个問題的近似作法，只是想說明我們不用直接量度的方法，也可以用直尺和圓規来处理这个問題，而且处理得还並不坏．

不过，虽說处理得不坏，它終究是一种近似的方法，所以

我們还是把它归在作圖不可能問題里面，这个問題是有名的三个作圖不可能問題之一.

提到有名的三个作圖不可能問題，我們旣然已經講了兩个，第三个也自然非講一講不可.不过我們也不准备講得很詳細.

一四 算它最困难

圓积求方問題.

你大概做过許多几何上等积变形的作圖吧. 譬如說：作一个三角形，使它和已知多边形等积；或者作一个正方形，使它和已知三角形等积. 但是我如果問你，你能不能作一个正方形，使它的面积等於一个已知圓的面积呢？

你也許像有些人一样会这样回答："圓是曲線所圍成的圖形，怎么可以把曲線所圍成的圓面积化成直線所圍成的正方形面积呢？"

这样說是不对的. 还在很古的时候，人們就已經知道用直尺和圓規可以把用圓弧所圍成的比較复杂的圖形化成正方形. 你总証过这样一个問題吧，这个問題几乎在所有几何課本里都可以找到：如圖 27，用直角三角形的弦做直徑的半圓跟用直角边

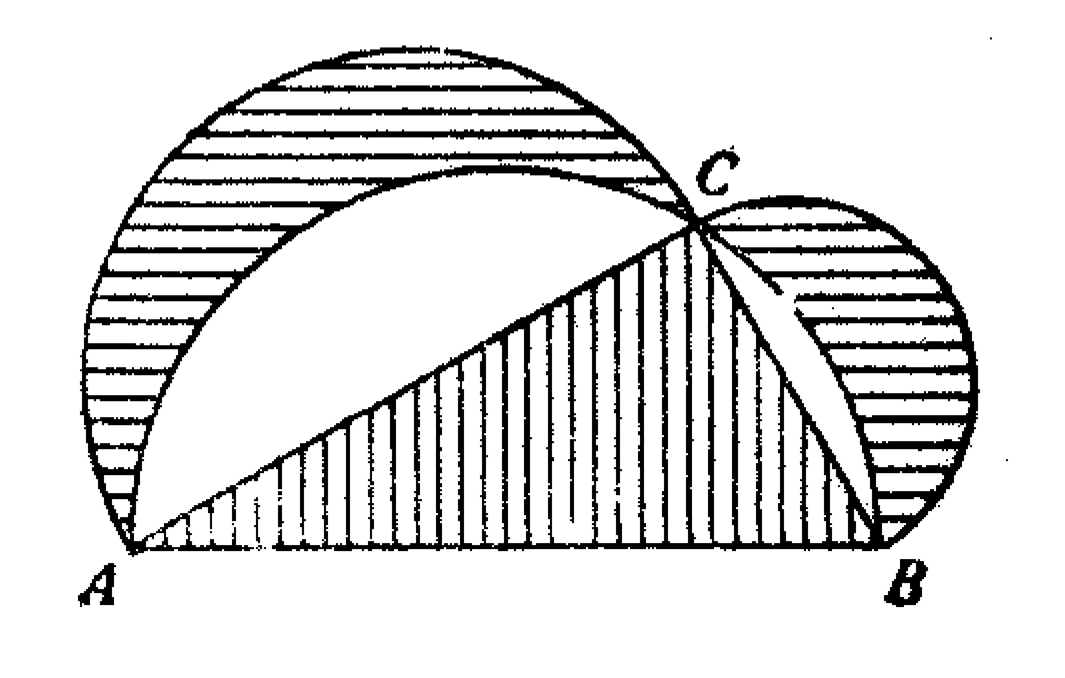


圖 27.

做直徑的半圓所夾的兩个鐮刀形(圖上有横的陰影線部分)的面积的和,等於这个直角三角形的面积(圖上有直的陰影線部分). 这樣說来,由曲線圍成的圖形是有可能只用直尺和圓規来化成直線圍成的圖形的.

然而要作一个正方形,使它的面积等於一个已知圓的面积,却确实是一个用直尺和圓規作圖的不可能問題.

这个問題叫圓积求方問題或化圓为方問題,或者簡單地就叫方圓問題. 它同三等分一角和倍立方体問題一样,也有悠久的历史,費去了許多数学家的精力. 在埃及的数学家阿米斯所写的極古老的一本数学書里,就有关於这个問題的記載,这大概是由於生产实践提出了研究面积的需要的緣故. 他所採用的方法是这样:把已知圓的直徑等分成九份,除去一份,把余下的八份做边作成正方形,就是所要求的. 用現在的目光来看,这方法当然只是近似的,但这是出於極古老的数学書上的,自然还是值得我們注意的. 很明显,假如这个正方形跟圓等积的話,那末 $\pi r^2=\left(\frac{8}{9}\cdot 2r\right)^2=\left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$,所以 $\pi=\frac{256}{81}=3.160\cdots\cdots$ 这个数值已經相当精确了. 事实上假如我們在实际問題上不需要怎样精密的話,这个世界上最古老的圓积求方法,还是可以採用的.

那末这个問題为什么用直尺和圓規不可能作出呢?

我們可以先作这样的分析:設圓的半徑 r 等於1,那末圓的面积就是 π,於是所求作的正方形的一边应該是 $\sqrt{\pi}$. 問題就只要考虑是不是能用有限多次的加减乘除和开平方来算出 $\sqrt{\pi}$,或者,是不是能够算出 π.

你会搶着說:"π 不是無理数嗎? 所以……"

所以不可能作出嗎? 那你又錯了. 因为有的無理数用直尺和圓規是完全可以正确地用作圖方法求出的. 我們不是曾經談过直接作出五角星的方法嗎? 那就只要先設法作出無理数$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ 就行了. 因此, π 所以不能作出, 並不完全因为它是無理数, 而是由於它的另一个特性, 就是它是一个"超越数". 这个性質是在 1882 年首先由德国数学家林德曼發現和証明的. 但是什么叫做"超越数"呢? 所謂"超越数", 就是不可能由某种有有理系数的方程算出的数, 也可以說, 不是一个代数上的数, 就是說这种数不能用通常代数学的运算方法求出, 不能用含有加減乘除以及含常数指数的冪和根的有限代数項表示出来, 卽使用开立方、四次方、五次方等方法也是無法求出的.

由於 π 这个数有这样的特性, 所以三个古老的初等几何作圖不可能問題当中, 在理論上說, 要算这个圓积求方問題解决起来最困难了.

不过在实际生活当中这个問題倒也常常会遇到, 人們也並沒有因它的困难而束手無策. 跳出了直尺和圓規作圖的圈子外面以后, 古代几何学家梁拉多达維奇用了一种非常巧妙的方法, 把这个問題解决了.

我們設已知圓的半徑是 r, 那末圓的面积就是 πr^2, 圓周長是 $2\pi r$. 假如把圓面积 πr^2 化成正方形的話, 那末正方形每边的長应該是 $\sqrt{\pi r^2}=r\sqrt{\pi}$.

但是我們可以把問題稍为改变一下, 因为 $\pi r^2=\frac{2\pi r^2}{2}=$

$2\pi r\cdot\frac{r}{2}$，所以假如用 $2\pi r$ 和 $\frac{r}{2}$ 做两边，做成一个矩形，这个矩形的面积就也等於已知圓的面积. 作出了这个矩形，再求作等积的正方形，問題就簡單了.

然而怎样来作出这个矩形呢？梁拉多达維奇採用了下面的方法：

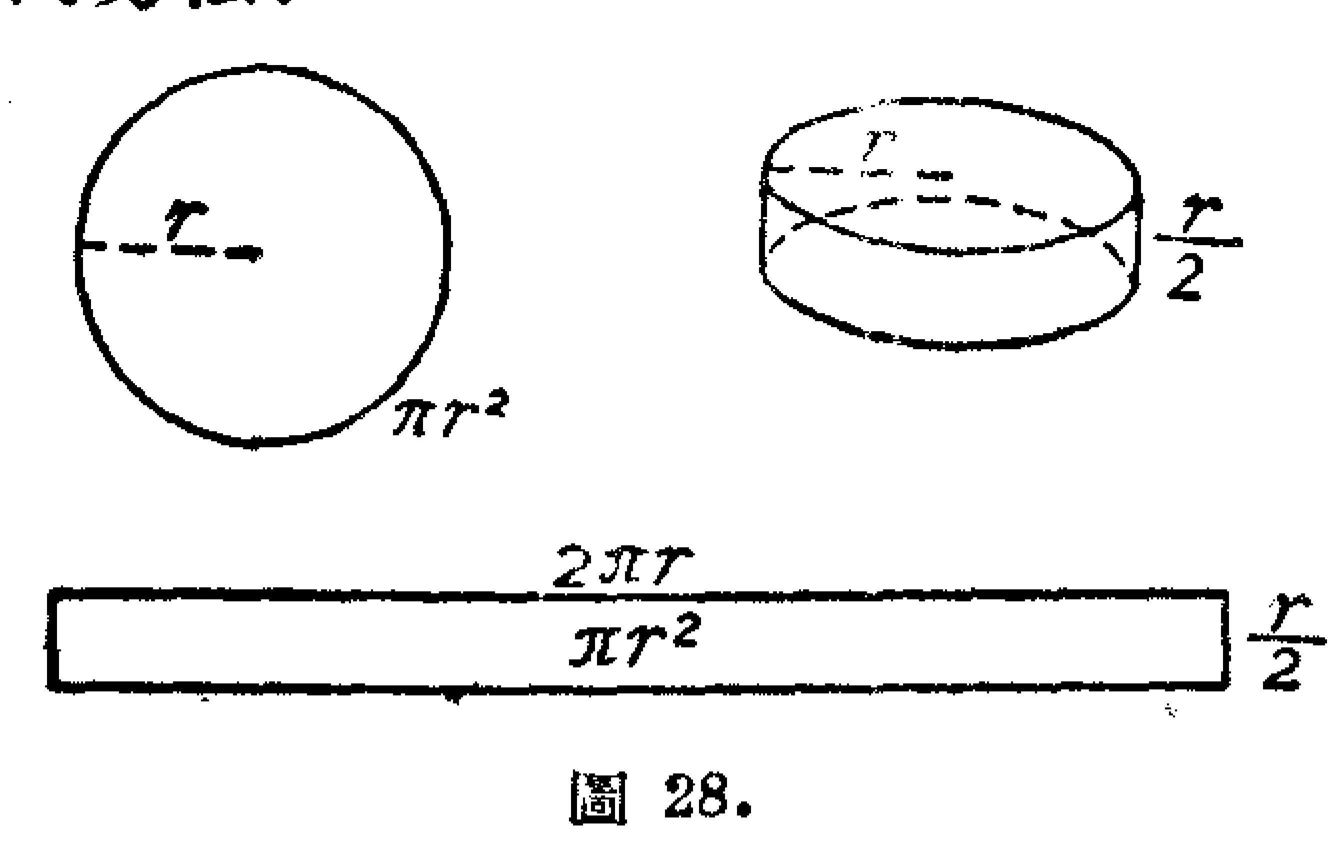


圖 28.

如圖 28，先作一个直圓柱，用已知圓做它的底面，用已知圓半徑的一半做它的高. 把这个圓柱当做輪盤，讓它在平面上滚一周，它滚到的地方便是一个矩形. 显然，这矩形的面积就等於已知圓的面积.

照这样看，所謂圓积求方問題的关鍵就在於怎样用線段来表示圓周的長，也就是圓周長的展开問題.

"关於圓周長的展开問題，几何課本上不是介紹了很多作法嗎？"你会提醒我說.

是的，不过我也要反过来提醒你，这些都只是近似的作法，因为圓周長的展开本来也是一个不可能作圖問題. 圓积求方問題也好，圓周長的展开問題也好，基本上都是一个作出 π 的問題，而 π 既是一个超越数，自然不能用直尺和圓規作出.

至於在实际生活当中，我們遇到要把圓周展开的問題，也可以根据实际問題所需要的精确程度，来採用各种近似的作

法．譬如箍桶的工人就常用徑一周三的方法，要更精确些可以用 $3\frac{1}{7}$ 作为 π 的値．假如要有更高的精确度，也可以採用阿多萊魯的方法：

如圖 29，作圓的直徑 AB 和在 B 点的切線 CD，作 $\angle BOC=30°$，取 $CD=3OB$，連 AD．AD 就近似於半个圓周的長．

因为 $tg\,30°=\frac{BC}{OB}=\frac{BC}{r}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $BC=\frac{\sqrt{3}}{3}r$．而

$$BD=3r-\frac{\sqrt{3}}{3}r=\frac{r(9-\sqrt{3})}{3},$$

所以 $AD=\sqrt{(2r)^2+\left\{\frac{r(9-\sqrt{3})}{3}\right\}^2}=r\sqrt{4+\frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}}$

$$=\frac{r}{3}\sqrt{120-18\sqrt{3}}\approx 3.14153\,r.$$

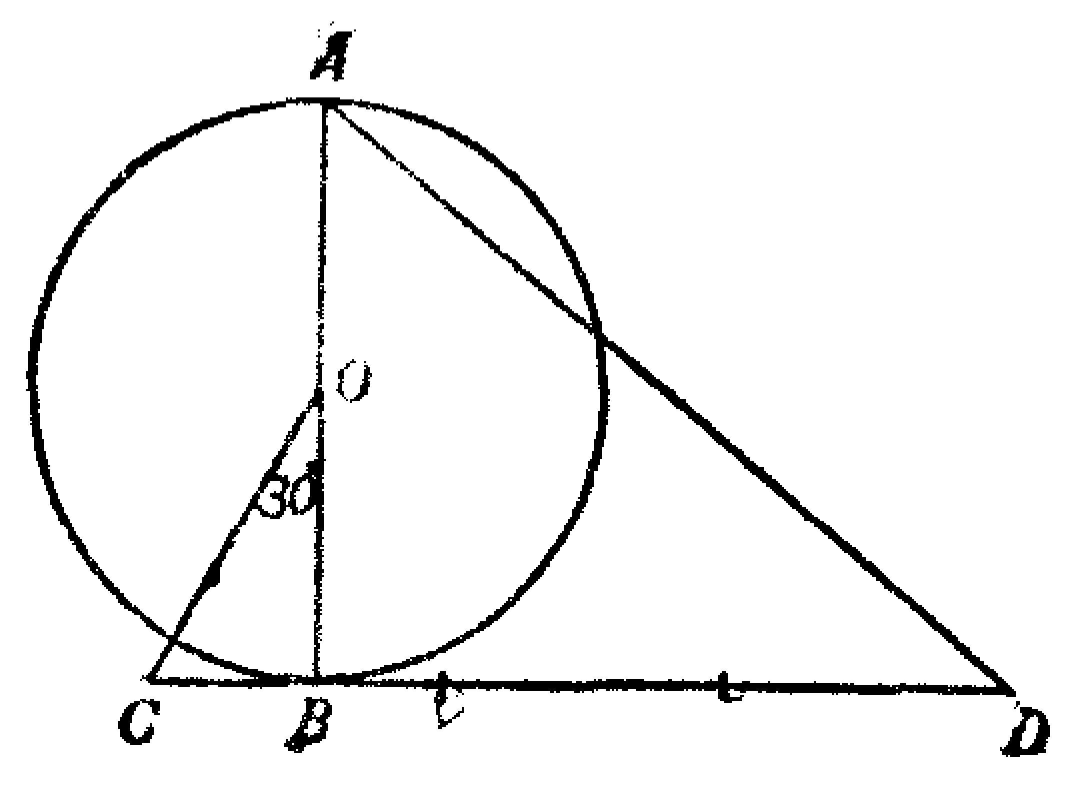


圖 29.

把这个数和 π 的五位小数値 3.14159 来比較，它的誤差不过是 $0.00006\,r$，这在实用意义上看，可以說是非常精密了．

有一点应該指出：假如利用圓周長的展开来近似地解圓积求方問題，它的誤差要比圓周展开的大些，因为圓周長是一次量，而面积是二次量．

另外，用一个特殊的三角板，也可以近似地解决这个問題，並且在实用上非常便利．这是 1836 年俄国工程师宾格所首創的，所以这个特殊三角板就叫"宾格三角板"．

这个三角板是根据这样的原理制造的：

如圖 30，在一个半徑是 r 的圓里作一条弦 AC，和直徑 AB 成一个角 θ，使这弦的長 x 恰巧等於跟圓的面积相等的正方形的边．現在求这个角 θ 应該是多少．我們知道 $\angle ACB=\angle R$，所以

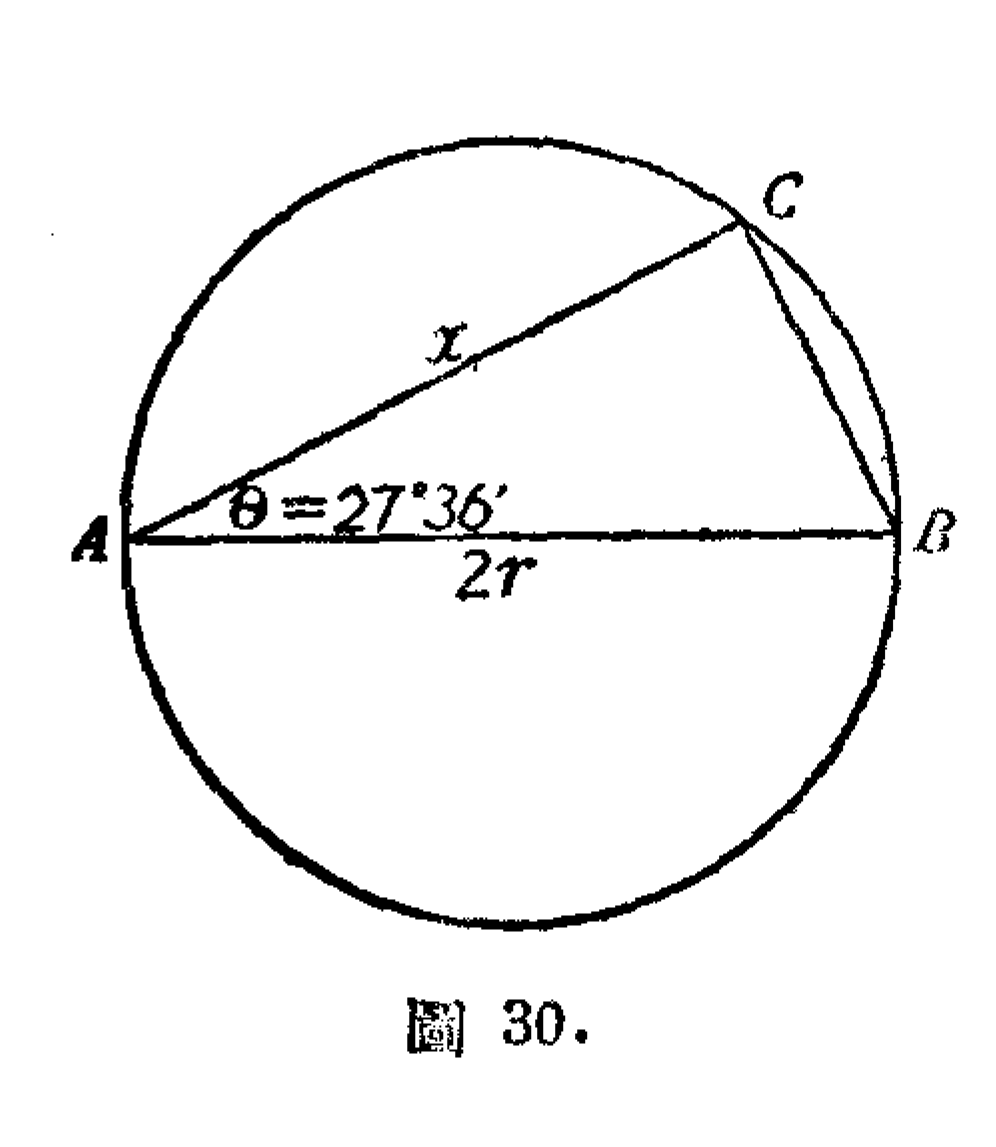


圖 30.

$$\cos\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{x}{2r}.$$

也就是所求的正方形的边長 $x=2r\cos\theta$，它的面积等於 $4r^2\cos^2\theta$.

从另一方面說，这个正方形的面积应該等於圓的面积 πr^2，因此

$$4r^2\cos^2\theta=\pi r^2,$$

从而
$$\cos^2\theta=\frac{\pi}{4},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\approx 0.8862.$$

从三角函数表里可以找到 $\theta=27°36'$.

这就是說，我們只要作一条和直徑成 $27°36'$ 的角的弦，就馬上得到面积跟这圓差不多相等的正方形的边了．为了方便起見，我們也可以先做出一个現成的直角三角板，使它的一个銳角是 $27°36'$，这样就可以用这塊三角板隨时求出跟任何一个圓等面积的正方形的边長了．

假如有人要求得到更高的精确度，那我們也可以应用計算的方法，因为在今天 π 的値已經算得十分精确了，而且在理論上說，可以計算到任意精确的程度．不过就实用意义上說，

只要得出相当精确的近似值的解答，也就已經很够了．法国天文学家阿拉哥就曾經这样說过："追求跟圓等面积的正方形的人們，在繼續做这个題目的演算，其实这一个題目的不可能解答，如今早已正式証明出来．而且，即使这个解答可能实現的話，在实用上也不会帶来絲毫好处的．"

然而，也並不是絕对沒有精确的方法来解决这个問題的．在理論上，利用高等数学里的圓积線 $\left(y=x\cot\frac{\pi x}{2r}\right)$，也是可以解答这个問題的．

一五 一些錯誤的想法

别再把宝貴的时間浪費在这些已經是不成問題的問題上．

"是不是除去前面所講的三个問題以外，还有别的作圖不可能問題呢？" 你听我几次提到"三个作圖不可能問題"，一定会提出这一个疑問来．

当然还有，而且多得很，我們不是曾經得出了这样的結論嗎？——如果一个長度不能由已知的長度用有限多次的加減乘除和开平方算出的話，便不能由已知的長度用欧氏作圖法作出．因此，有些几何作圖題，通过代数的解析，如果得出了像上面所說的結果，那就是作圖不可能問題．而且有些作圖不可能問題表面上看来似乎很簡單，如：过二定直線間的一定点，求作一直線，使它夾在二定直線間的部分是定長．你初看一定認为这是一个比較容易的作圖問題，其实它就是一个作

圖不可能問題. 又如: 你总該知道已知三角形的三中線或三高求作三角形的兩个作圖題吧, 它們各有好几种作法. 但是你是不是曾經考虑到已知三角形三角的平分線求作三角形的問題呢? 中線、高和角平分線不同样是三角形里的主要線段嗎? 因此在上面兩个作圖問題的基础上, 你就有可能連想到它. 然而我告訴你, 它也是个作圖不可能問題.

类似这样的問題还可以举出很多来!

那末为什么我們在研究几何作圖不可能問題的时候, 老是先提到三等分一角、倍立方体和圓积求方問題呢? 这道理也不是不容易想像到的: 一来因为这些問題在表面上看来似乎很簡單, 而在作圖的过程里却遇到了極大的困难; 二来这三个問題都有二千多年的悠久历史, 它們已經費去了許多数学家的精力, 絞尽了許多数学家的腦汁, 因此, 它們也很自然地被人們認做是作圖不可能問題当中的典型問題了.

直到目前, 这三个典型問題还引起許多学習数学的人們的兴趣.

对於这些問題感兴趣, 如果从而探討它們所以不可能的道理, 进一步引起你去学習高等数学的兴趣, 那倒並不是一件坏事. 遺憾的是, 有許多人並不是用正确的方法来研究这些問題, 他們不相信这些問題在初等几何里作圖的不可能性, 却为它們表面的簡單形式所迷惑, 認为这些問題一定能解出, 就絞尽腦汁想去解决它們. 他們也不能对証实这些問題的不可能性的理論提出什么相反的意見, 有的甚至不懂得这些理論, 有的还以为目前虽然不能, 將来或許有可能. 其实他們的这些想

法都是錯誤的.他們这样做只是在浪費他們宝貴的时間,結果却是注定要失敗的.

这些人的做法也有各种各样:

有的是單憑直观想来解决这一些問題,他們想当然地說明一下,甚至圖形画得非常复杂,显然,这种作法是經不起考驗的.

有的是把直尺和圓規的使用方法改变一下,譬如我們前面說过的直尺圓規合併使用或直尺上添加刻度等方法,但是这是跟初等几何的作圖公法不相合的.

有的在作圖的过程当中,暗地里运用了非直線和圓的曲線軌跡上的点.这些方法有的是正确的,但是这跟我們所說的作圖不可能問題無关,而像这种用别的曲線的方法,其实在很古的时候,就有許多人發現了不止一种了.

也有的人在遭遇到失敗以后,想把問題变换成别的作圖題形式,以为这样一来或許可以使作圖变成可能,这种尝試也一定是不会成功的.我們知道作圖不可能問題並不只是限於前面所說的三个,从这三个变出来的任何作圖題也一定是不可能的.

对於这样的人,我提出一个忠告:别再把宝貴的时間浪費在这些已經是不成問題的問題上.

但是另一方面,也有些人記住了这些作圖問題的不可能性,却忘記了这只是限於用直尺和圓規才不可能作圖,因此他們在实际生活当中遇到了这些問題的时候,就束手無策,还認为这是理論决定的.这也同样是錯誤的.

所以，总的說来，这些所謂初等几何上作圖不可能問題，在今天不論在理論上或是实踐上，都是早已得到滿意的解答的，在这方面已經用不到我們再去白費精力了.

現在，党和政府正在号召我們向科学进軍，我們要响应这个号召，訂出自己的学習計划来. 假如我們还沒有足够的基础知識，就应該脚踏实地循序漸进地学好基础知識；假如我們已經有了足够的基础知識，那末科学技术上需要我們去研究的問題多得很，我們有辽闊的天地供我們活动. 假如你对数学特别有兴趣，那在我們新中国也有很好的条件讓你向这一个方向去进軍. 你知道我国在数学的某些方面的成就已經达到了国际水平，我国也有世界上第一流的数学家. 只要你有毅力，有耐心，肯刻苦鑽研，独立思考，你也一定会有所成就. 但是你一方面要善於独立思考，一方面也要善於接受前人已有的成果. 就像几何作圖不可能問題，既然前人已經解决，就用不到我們再去鑽牛角尖，否則只会把自己送进不可自拔的泥坑.